ΤΕΙ Θεσσαλονίκης
Τμήμα Πληροφορικής

Γραφικά Υπολογιστών: Spline Αναπαραστάσεις

Πασχάλης Ράπτης
http://aetos.it.teithe.gr/~praptis
praptis@it.teithe.gr

Περιεχόμενα

Σήμερα θα δούμε τις εύκαμπτες (spline) καμπύλες του Bézier

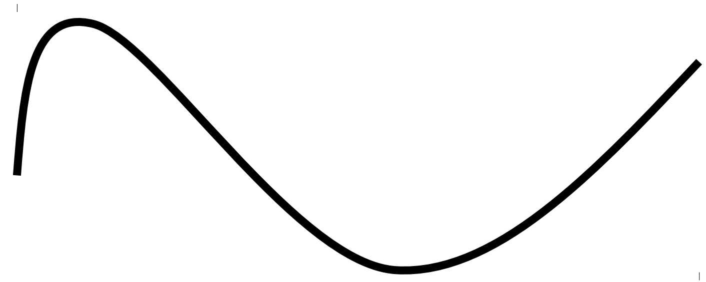
- Εισαγωγή στις εύκαμπτες καμπύλες
- Καμπύλες (curves) Bézier
- Τετραγωνικές (κυβικές) καμπύλες Bézier (cubic splines)

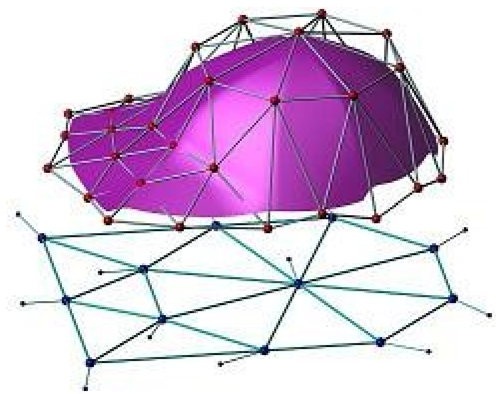
Εύκαμπες Αναπαραστάσεις
(Spline Representations)

Εύκαμπτη καμπύλη (spline) είναι μια ομαλή-λεία καμπύλη που ορίζεται μαθηματικώς χρησιμοποιώντας ένα σύνολο από περιορισμούς.

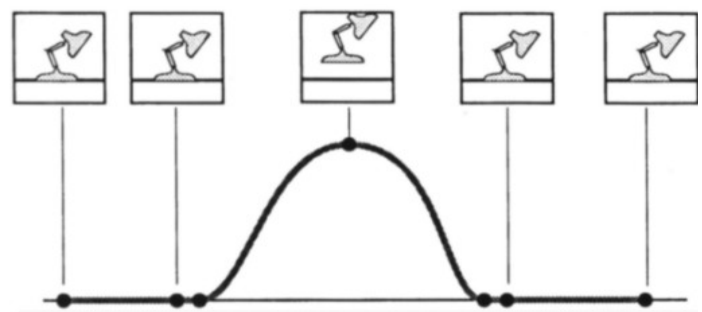
Εύκαμπτες καμπύλες και εύκαμπτες επιφάνειες (splines) έχουν πολλές χρήσεις:

- 2D εικόνες (illustration)
- Γραμματοσειρές (fonts)
- 3D μοντελοποίηση
- Animation





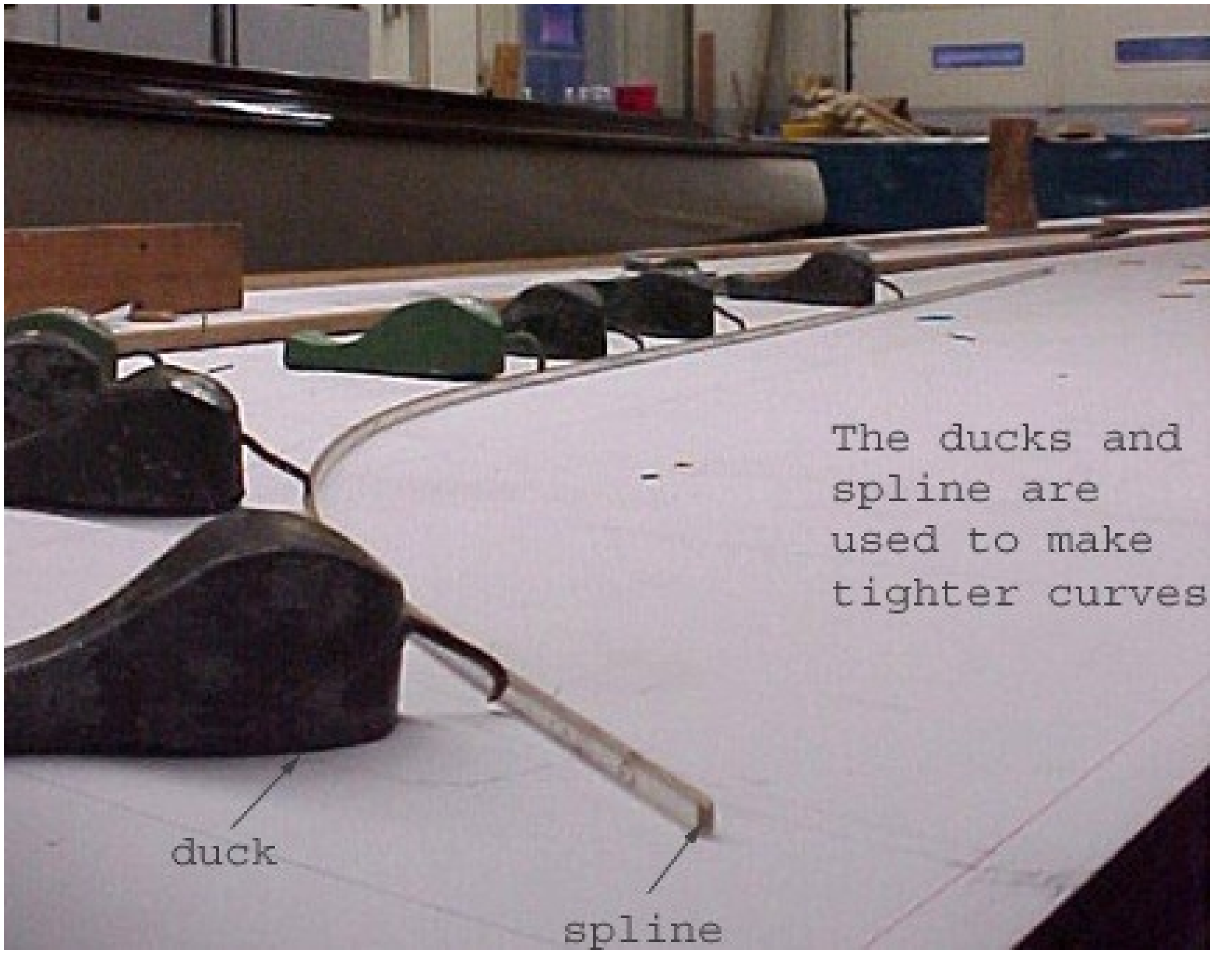
“Manifold Splines”, X. Gu, Y. He & H. Qin, Solid and Physics Modeling 2005.



ACM © 1987 “Principles of traditional animation applied to 3D computer

Physical Splines

Φυσικές splines χρησιμοποιούνται στην σχεδίαση αυτοκινήτων και πλοίων

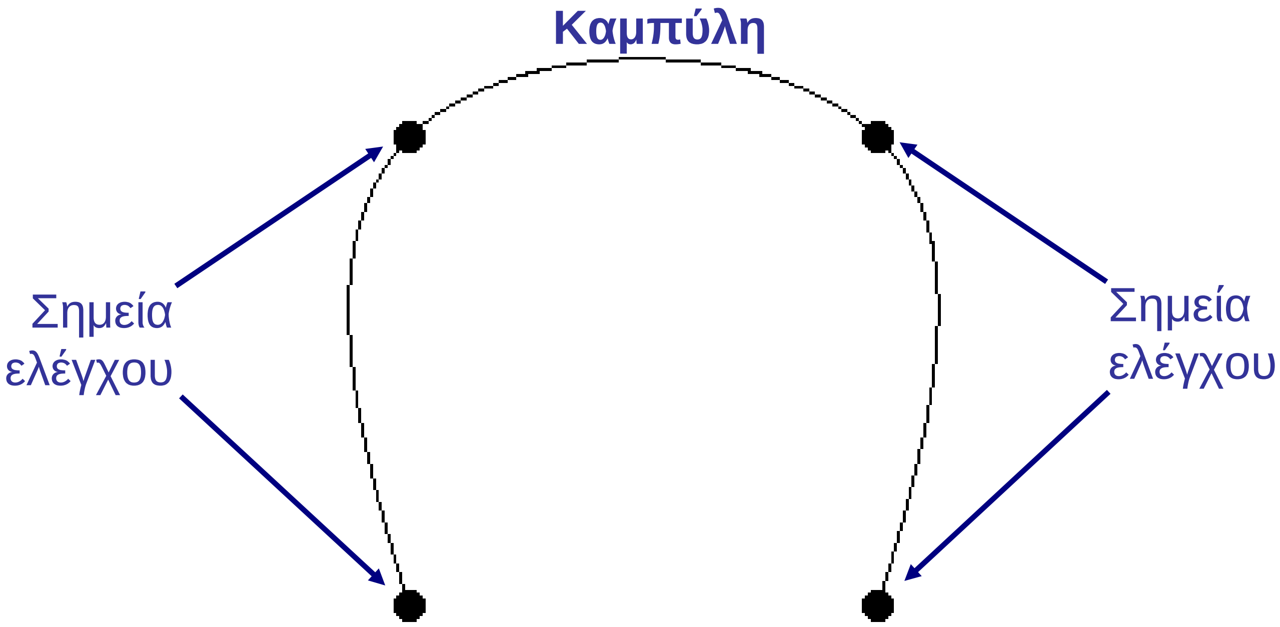


Pierre Bézier

Βασική Ιδέα

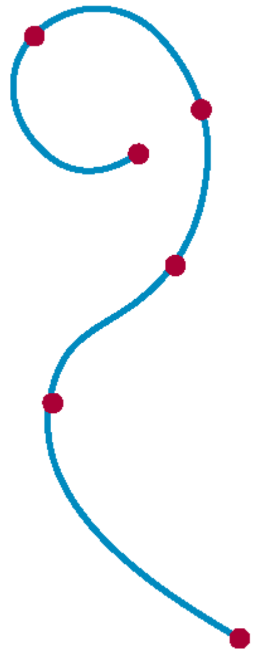
Ο χρήστης ορίζει σημεία ελέγχου (control points).

Τα σημεία ορίζουν μια ομαλή-λεία καμπύλη



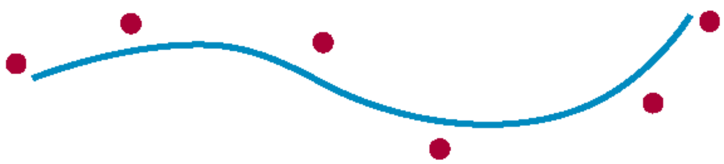
Παρεμβολή και Προσέγγιση

Μια εύκαμπτη (spline) καμπύλη ορίζεται χρησιμοποιώντας ένα σύνολο από **σημεία ελέγχου** (control points)



Υπάρχουν <u>δύο τρόποι</u> να ταιριάξει μια καμπύλη αυτά τα σημεία:

– **Παρεμβολή (interpolation) –** η καμπύλη περνά από όλα τα σημεία ελέγχου
– **Προσέγγιση (approximation) –** η καμπύλη δεν περνά από όλα τα σημεία ελεγχου

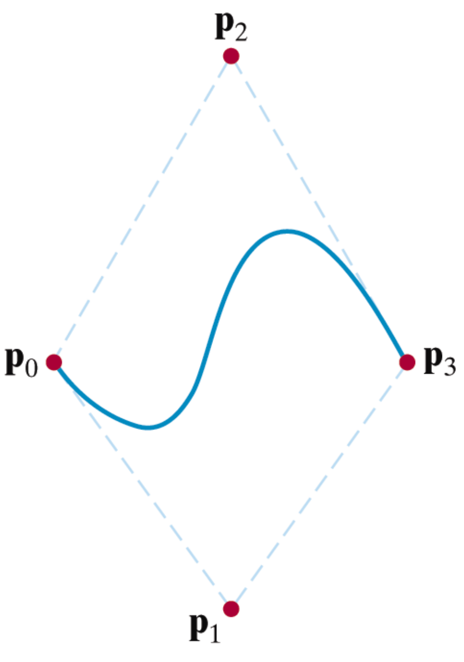


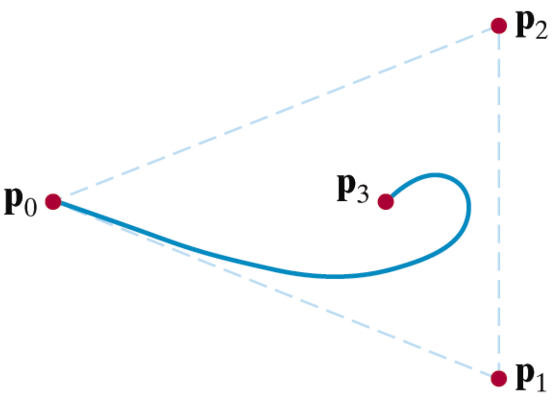
Convex Hulls

Images taken from Hearn & Baker, "Computer Graphics with OpenGL" (2004)

Τα όρια που σχηματίζονται από το σύνολο των σημείων ελέγχου για μια spline είναι γνωστά ως **convex hull (κυρτός φλοιός)**

Σκεφτείτε το ως μια ελαστική κορδέλα (λαστιχάκι) να απλώνεται γύρω από τα σημεία ελέγχου.

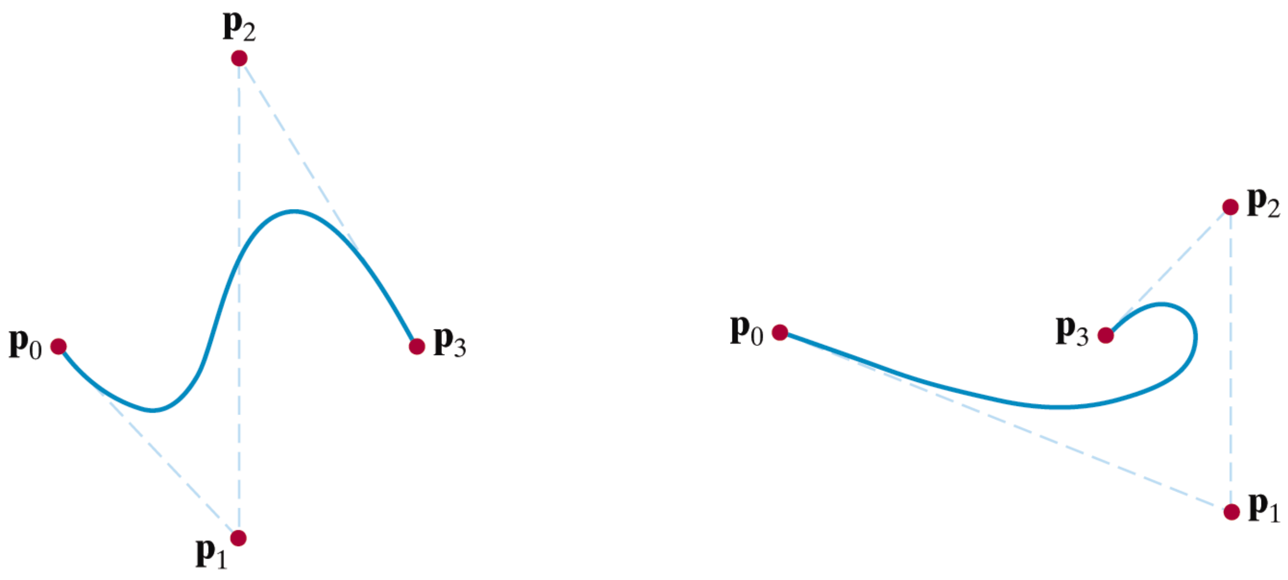




Διάγραμμα Ελέγχου

Μια γραμμή (polyline) (που δημιουργείται από ένα ή περισσότερα τμήματα γραμμών) που συνδέει τα σημεία ελέγχου με την σειρά είναι γνωστή ως **διάγραμμα ελέγχου** (control graph)

Συνήθως εμφανίζεται για να βοηθά τους σχεδιαστές να παρακολουθούν τις splines τους



Spline καμπύλες του Bézier
(Bézier Spline Curves)

Μια προσεγγιστική μέθοδος, για την σχεδίαση spline καμπυλών, αναπτύχθηκε από τον Γάλλο μηχανικός Bézier Pierre για χρήση στο σχεδιασμό αμαξωμάτων της Renault.

Μια καμπύλη Bézier μπορεί να ταιριάζει (fitted) σε οποιοδήποτε αριθμό σημείων ελέγχου - αλλά συνήθως χρησιμοποιούνται 4.

Spline καμπύλες του Bézier (2)

Θεωρούμε την περίπτωση που έχουμε $n+1$ σημεία ελέγχου και συμβολίζεται ως $p_k=(x_k, y_k, z_k)$ όπου k μεταβάλλεται από 0 έως n

Οι θέσεις συντεταγμένων αναμειγνύονται για την παραγωγή του διάνυσματος θέσης $P(u)$, το οποίο περιγράφει την πορεία της πολυωνυμική συνάρτησης Bézier μεταξύ του p_0 και του p_n

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} p_k BEZ_{k,n}(u), \qquad 0 \leq u \leq 1$$

Spline καμπύλες του Bézier (3)

Οι Bézier συναρτήσεις ανάμειξης $BEZ_{k,n}(u)$ είναι πολυώνυμα του *Bernstein (polynomials)*

$$BEZ_{k,n}(u) = C(n,k)u^k(1-u)^{n-k}$$

όπου οι παράμετροι $C(n,k)$ *είναι οι συντελεστές διωνύμων* (binomial coefficients)

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Spline καμπύλες του Bézier (4)

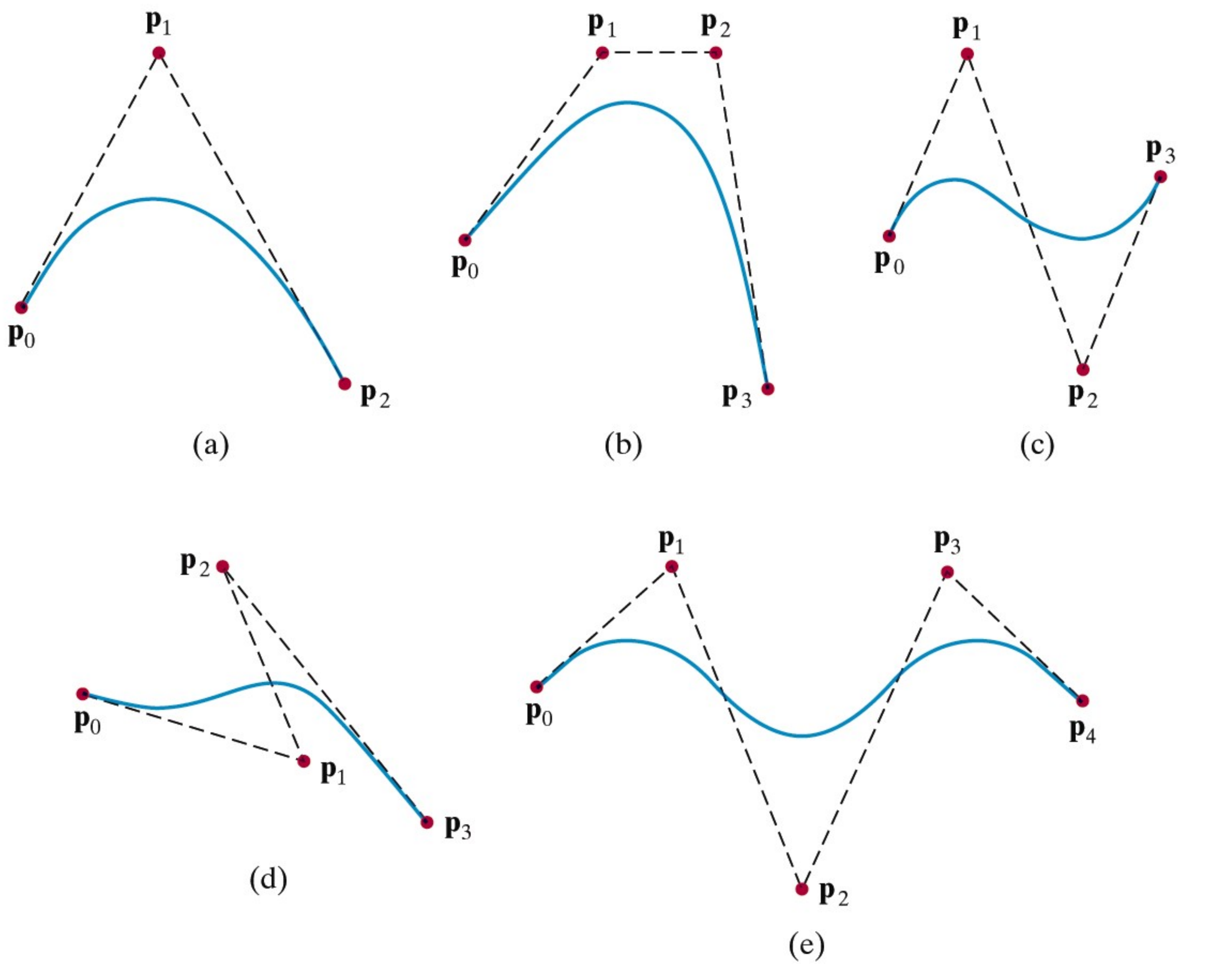
Έτσι, οι συντεταγμένες για μια συγκεκριμένη καμπύλη μπορούν να δοθούν ως

$$x(u) = \sum_{k=0}^{n} x_k BEZ_{k,n}(u)$$

$$y(u) = \sum_{k=0}^{n} y_k BEZ_{k,n}(u)$$

$$z(u) = \sum_{k=0}^{n} z_k BEZ_{k,n}(u)$$

Spline καμπύλες του Bézier (5)



Images taken from Hearn & Baker, “Computer Graphics with OpenGL” (2004)

Σημαντικές Ιδιότητες των καμπυλών Bézier

Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου είναι το πρώτο και το τελευταίο σημείο στην καμπύλη

- $P(0) = p_0$
- $P(1) = p_n$

Η καμπύλη βρίσκεται εντός του κυρτού φλοιού (convex hull) καθώς οι συναρτήσεις ανάμειξης Bézier είναι όλες θετικές και με άθροισμα 1

$$\sum_{k=0}^{n} BEZ_{k,n}(u) = 1$$

Τετραγωνικές Καμπύλες Bézier (Cubic Bézier Curve)

Πολλά πακέτα γραφικών περιορίζουν τις καμπύλες Bézier να έχει μόνο 4 σημεία ελέγχου (δηλαδή $n = 3$)

Οι συναρτήσεις ανάμειξης όταν το $n = 3$ απλοποιούνται ως εξής :

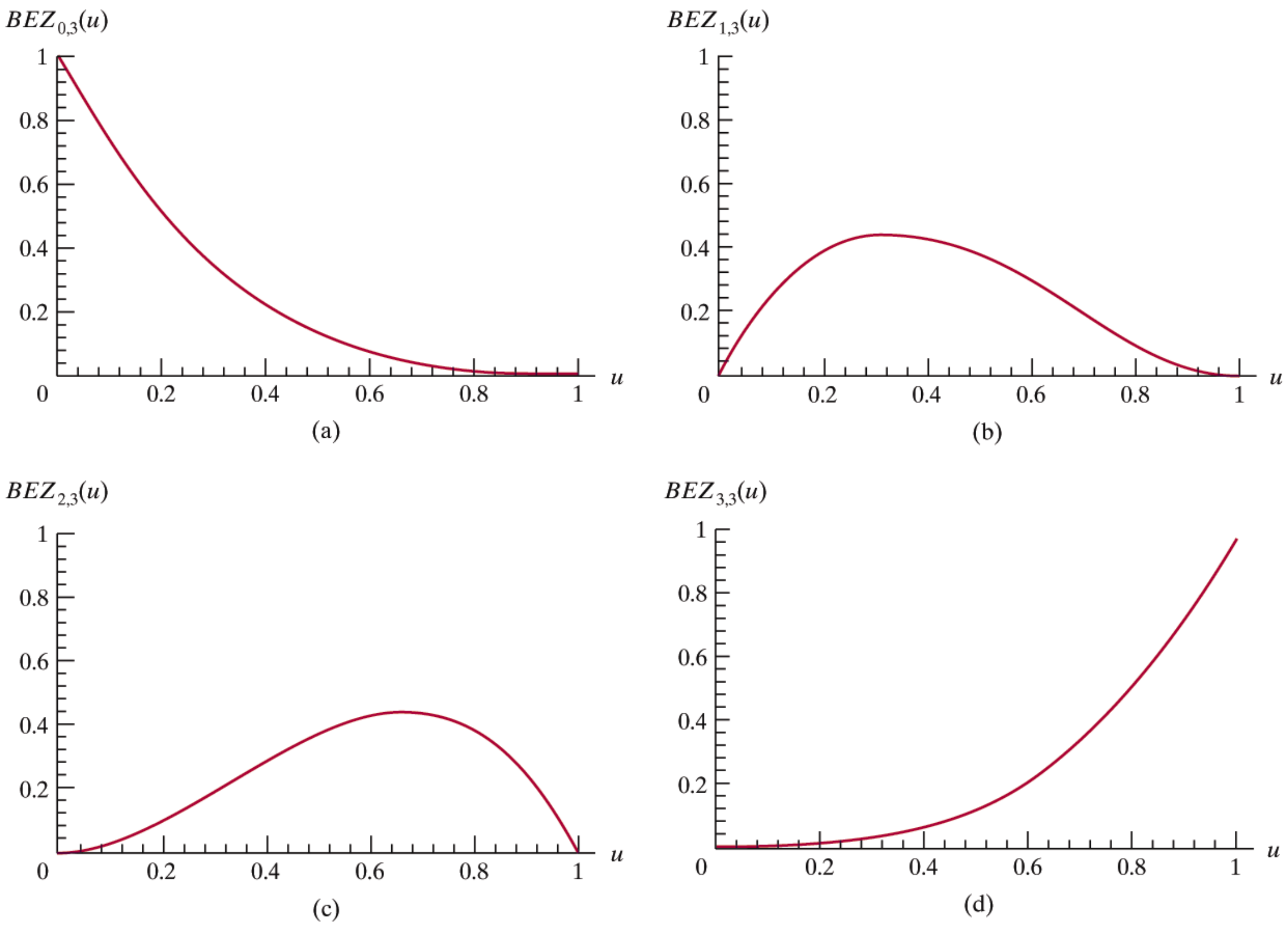
$$BEZ_{0,3} = (1-u)^3$$

$$BEZ_{1,3} = 3u(1-u)^2$$

$$BEZ_{2,3} = 3u^2(1-u)$$

$$BEZ_{3,3} = u^3$$

Τετραγωνικές Bézier Συναρτήσεις Ανάμειξης (Cubic Bézier Blending Functions)



Σύνοψη

Σήμερα είδαμε στις spline καμπύλες και ιδίως καμπύλες Bézier

Το όλο θέμα είναι ότι οι spline συναρτήσεις μας δίνουν μία προσέγγιση για μια ομαλή καμπύλη.