Στατιστικά Μοντέλα και ο Κανόνας του Bayes

Κώστας Διαμαντάρας
Τμήμα Πληροφορικής
ΤΕΙ Θεσσαλονίκης

Ο κανόνας του Bayes (προφ. *Μπέιζ*): Θυμόμαστε τις πιθανότητες

<u>Η πιθανότητα ως κλάσμα επί ενός συνόλου:</u>

Παράδειγμα: Έστω

- Ω = το σύνολο όλων των ανθρώπων του κόσμου
- N = το πλήθος των ανθρώπων (= πλήθος στοιχείων του Ω)
- A = το σύνολο των Ασιατών
- N_A = το πλήθος των Ασιατών (= πλήθος στοιχείων του A)
- Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν άνθρωπο X (δείγμα) τότε

$$\Pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha(X \epsilon A) = \frac{N_A}{N}$$

- Γράφεται: $P(A) = \frac{N_A}{N}$

Ο κανόνας του Bayes: Εισαγωγή στις πιθανότητες

- Η πιθανότητα $P(A)$ είναι το *ποσοστό* των Ασιατών επί του συνόλου όλων των ανθρώπων.
- **Δεσμευμένη πιθανότητα**: το ποσοστό επί ενός υποσυνόλου του Ω

Παράδειγμα: Δεσμευμένη πιθανότητα να είναι κανείς Ασιάτης δεδομένου ότι είναι Βουδιστής. Έστω

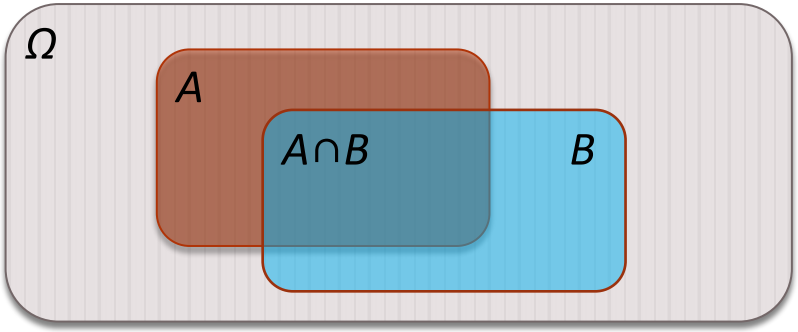
- B = το σύνολο των Βουδιστών
- N_B = το πλήθος των Βουδιστών (= το πλήθος των στοιχείων του B)
- Αν τώρα επιλέξουμε στην τύχη ένα δείγμα X από τους Βουδιστές (όχι πλέον από όλον τον κόσμο), τότε...

Ο κανόνας του Bayes: Εισαγωγή στις πιθανότητες

$$\textit{Πιθανότητα}(X \epsilon A \ \textit{με δεδομένο ότι} \ X \epsilon B) = \frac{N_{A \cap B}}{N_B}$$

- Γράφεται: $$P(A \mid B) = \frac{N_{A \cap B}}{N_B}$$

- $N_{A \cap B}$ = το πλήθος των στοιχείων της τομής των συνόλων A και B, *δηλαδή το πλήθος αυτών που είναι και Ασιάτες και Βουδιστές ταυτόχρονα.*



Σημαντική Παρατήρηση

- **Ορισμός**:

  Ονομάζουμε $P(A,B)$ την πιθανότητα να ισχύει A **και** B.

$$P(A,B) = \Pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha(X\epsilon A\ \kappa\alpha\iota\ X\epsilon B)$$

- Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$P(A \mid B) = \frac{N_{A\cap B}}{N}\frac{N}{N_B} = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

Ο κανόνας του Bayes

- Οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα...

$$P(A \mid B) = \frac{N_{A \cap B}}{N_B}$$

- ...και προφανώς:

$$P(B \mid A) = \frac{N_{A \cap B}}{N_A}$$

- οπότε

$$\frac{P(A \mid B)}{P(B \mid A)} = \frac{N_A}{N_B} = \frac{N_A}{N}\frac{N}{N_B} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B \mid A)}$$

Ο κανόνας του Bayes

Παράδειγμα:

- $N = 7 \cdot 10^9$ (ο πληθυσμός της γης)
- $N_A = 3{,}8 \cdot 10^9$ (ο πληθυσμός της Ασίας)
- $N_B = 0{,}40 \cdot 10^9$ (ο πληθυσμός των Βουδιστών)
- $N_{A \cap B} = 0{,}35 \cdot 10^9$ (το πλήθος των Ασιατών Βουδιστών)
- **Αρχική Πιθανότητα** (**Prior Probability**) να είσαι Ασιάτης:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3{,}8 \cdot 10^9}{7 \cdot 10^9} = 0{,}543$$

- Αρχική Πιθανότητα (Prior Probability) να είσαι Βουδιστής:

$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{0{,}4 \cdot 10^9}{7 \cdot 10^9} = 0{,}057$$

Ο κανόνας του Bayes

Παράδειγμα (συνέχεια):

$$P(A \mid B) = \frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{0{,}35 \cdot 10^9}{0{,}4 \cdot 10^9} = 0{,}875$$

- Σχόλιο: το 87,5% των Βουδιστών είναι Ασιάτες

$$P(B \mid A) = \frac{N_{A\cap B}}{N_A} = \frac{0{,}35 \cdot 10^9}{3{,}8 \cdot 10^9} = 0{,}092$$

- Σχόλιο: Το 9,2% των Ασιατών είναι Βουδιστές.

- Κανόνας του Bayes:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B \mid A) = \frac{0{,}543}{0{,}057} P(B \mid A) = 9{,}5 \cdot P(B \mid A)$$

- Επαλήθευση: $0{,}875 = 9{,}5 \cdot 0{,}092$

Γενίκευση του κανόνα Bayes

- Ο κανόνας ισχύει γενικά ακόμη και αν οι τυχαίες μεταβλητές *A* και *B* αφορούν αριθμούς και όχι σύνολα. Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε την δεσμευμένη πιθανότητα

  $$P(A = a \mid B = b)$$

  όπου
  - *A* = η αξία του χρυσού ($ ανά ουγγιά)
  - *B* = η αξία του αργύρου ($ ανά ουγγιά)
- Γενικά: Η πιθανότητα η μεταβλητή *A* να έχει την τιμή *a* δεδομένου ότι η μεταβλητή *B* έχει την τιμή *b* γράφεται:

$$P_{A|B}(a \mid b) = \frac{P_A(a)}{P_B(b)} P_{B|A}(b \mid a)$$

Γενίκευση του κανόνα Bayes

- Ο κανόνας ισχύει ακόμη και όταν οι τυχαίες μεταβλητές *A*, *B* είναι συνεχείς (όχι διακριτές).
- Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε την **πυκνότητα πιθανότητας** (**probability density function**)...

$$p_A(a) = \frac{Prob(a < A < a + da)}{da}$$

- ...και την **δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας**:

$$p_{A|B}(a \mid b) = \frac{Prob(a < A < a + da \mid B = b)}{da}$$

- Κανόνας Bayes:

$$p_{A|B}(a \mid b) = \frac{p_A(a)}{p_B(b)} p_{B|A}(b \mid a)$$

Χρήση του κανόνα Bayes στην αναγνώριση προτύπων

- Γενικά, στο πρόβλημα της αναγνώρισης προτύπων καλούμαστε να επιλέξουμε *μια κλάση* C_j στην οποία θεωρούμε ότι ανήκει ένα πρότυπο X με δεδομένο το διάνυσμα χαρακτηριστικών $\boldsymbol{x}$ του προτύπου αυτού. Η επιλογή μας γίνεται μέσα από N πιθανές κλάσεις

  $C_1, C_2, \ldots, C_N$.
- **Ορισμός: Εκ των προτέρων πιθανότητα (a priori probability)** $P(X \epsilon C_i)$

  Πριν δούμε το διάνυσμα χαρακτηριστικών $\boldsymbol{x}$
- **Ορισμός: Εκ των υστέρων πιθανότητα (a posteriori probability)** $P(X \epsilon C_i \mid \boldsymbol{x})$

  Αφού δούμε το διάνυσμα χαρακτηριστικών $\boldsymbol{x}$

Μέγιστη εκ των Υστέρων Πιθανότητα (ΜεΥΠ)

Η μέθοδος της Μέγιστης εκ των Υστέρων Πιθανότητας

- Έστω ότι γνωρίζουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες $P(X \epsilon C_i \mid \boldsymbol{x})$ για όλες τις κλάσεις C_j ...

  τότε η καλύτερη απόφαση θα είναι να επιλέξουμε την κλάση *j* που δίνει την **μέγιστη** εκ των υστέρων πιθανότητα, δηλαδή...

- Επιλέγω την κλάση C_j για την οποία

$$P\left(X \epsilon C_j \mid \boldsymbol{x}\right) > P(X \epsilon C_i \mid \boldsymbol{x}) \quad για\ όλα\ τα\ i \neq j$$

- *Maximum A Posteriori (MAP) estimator.*

Μέγιστη εκ των Υστέρων Πιθανότητα (ΜεΥΠ)

- Συχνά, η εκ των υστέρων πιθανότητα είναι δύσκολο να υπολογιστεί. Ωστόσο χάρη στο νόμο του Bayes, μπορούμε να πούμε ότι

◈ Επιλέγω την κλάση C_j για την οποία

$$P(\boldsymbol{x} \mid X \epsilon C_j) \frac{P(X \epsilon C_j)}{P(\boldsymbol{x})} > P(\boldsymbol{x} \mid X \epsilon C_i) \frac{P(X \epsilon C_i)}{P(\boldsymbol{x})} \quad \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ i \neq j$$

Ή ισοδύναμα (αφού απαλείψω τον παρονομαστή $P(\boldsymbol{x})$):

$$\boxed{P(\boldsymbol{x} \mid X \epsilon C_j) P(X \epsilon C_j) > P(\boldsymbol{x} \mid X \epsilon C_i) P(X \epsilon C_i) \quad \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ i \neq j}$$

Εκ των προτέρων πιθανότητα του διανύσματος χαρακτηριστικών

- Αν και η εκ των προτέρων πιθανότητα του $\boldsymbol{x}$ απαλείφεται και άρα δεν μας χρειάζεται στον κανόνα ΜεΥΠ, εν τούτοις το $P(\boldsymbol{x})$ απαιτείται για να υπολογίσουμε το $P(\boldsymbol{x}|C_i)$.
- Ισχύει

$$\boxed{\begin{aligned} P(\boldsymbol{x}) &= P(\boldsymbol{x}, C_1) + \cdots + P(\boldsymbol{x}, C_M) \\ &= \sum_{i=1}^{M} P(\boldsymbol{x}|C_i)P(C_i) \end{aligned}}$$

Πιθανοφάνεια

- **Ορισμός**: Η πιθανότητα $P(\boldsymbol{x} \mid X \epsilon C_i)$ καλείται **Συνάρτηση πιθανοφάνειας** του $\boldsymbol{x}$ για την κλάση C_i

Μέγιστη [*Εκ των Υστέρων Πιθανότητα*]

$$\Updownarrow$$

Μέγιστη [*Πιθανοφάνεια*]×[*Εκ των Προτέρων Πιθανότητα*]

- Η «Πιθανοφάνεια» μαζί με την «Εκ των Προτέρων Πιθανότητα» για κάθε κλάση είναι συχνά πιο εύκολο να υπολογιστούν.

Αναγνώριση προτύπων με ΜεΥΠ

Παράδειγμα:

- Έστω ότι θέλουμε να αναγνωρίζουμε δείγματα από δύο κλάσεις: C_0=«*Γυναίκες*» και C_1=«*Άνδρες*». Για κάθε δείγμα X διαθέτουμε το διάνυσμα χαρακτηριστικών

  $$\boldsymbol{x} = [x : \text{ύψος του } X]$$

  (το διάνυσμα ***x*** αποτελείται από μόνο ένα στοιχείο για απλούστευση).
- Γνωρίζουμε τις «*εκ των προτέρων*» πιθανότητες:

  $$P(C_0) = P(X \epsilon C_0) = 0{,}5 \qquad P(C_1) = P(X \epsilon C_1) = 0{,}5$$

  (η πιθανότητα να επιλέξουμε άνδρα ή γυναίκα είναι 50/50).

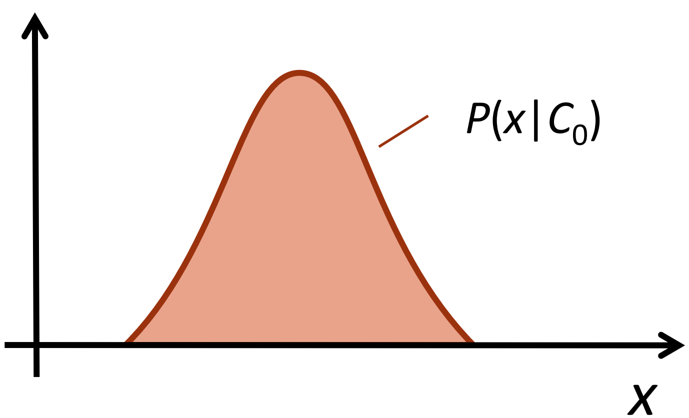
Αναγνώριση προτύπων με ΜεΥΠ

Παράδειγμα (συνέχεια)

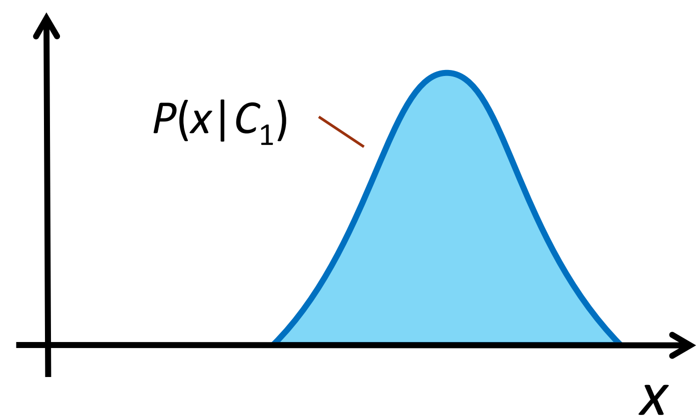
- Από μελέτες γνωρίζουμε τις κατανομές πιθανότητας ύψους για άνδρες και γυναίκες (*πιθανοφάνειες*):

$$P(x \mid C_0) = P(x \mid X \epsilon C_0) \qquad P(x \mid C_1) = P(x \mid X \epsilon C_1)$$

- Οπότε μπορούμε να σχεδιάσουμε τις καμπύλες:



Γυναίκες



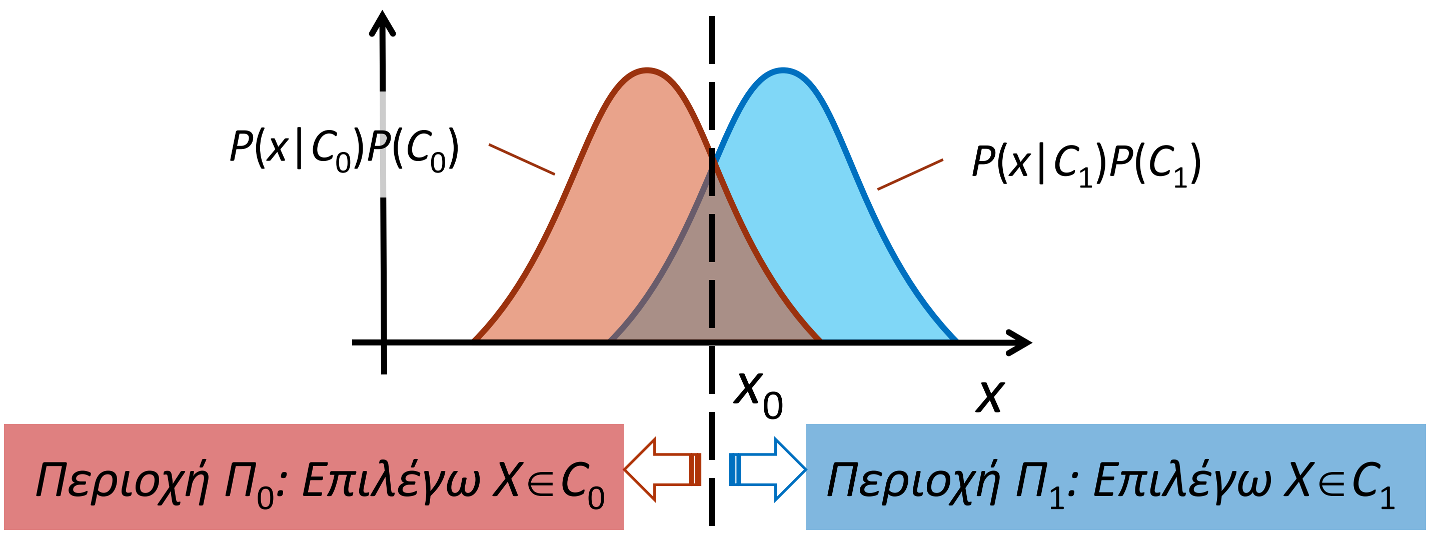
Άνδρες

Αναγνώριση προτύπων με ΜεΥΠ

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η επιλογή με βάση την μέγιστη εκ των υστέρων πιθανότητα γίνεται με **κατώφλι** το σημείο x_0 όπου

$$P(x_0 \mid C_0)P(C_0) = P(x_0 \mid C_1)P(C_1)$$



Αναγνώριση προτύπων με ΜεΥΠ

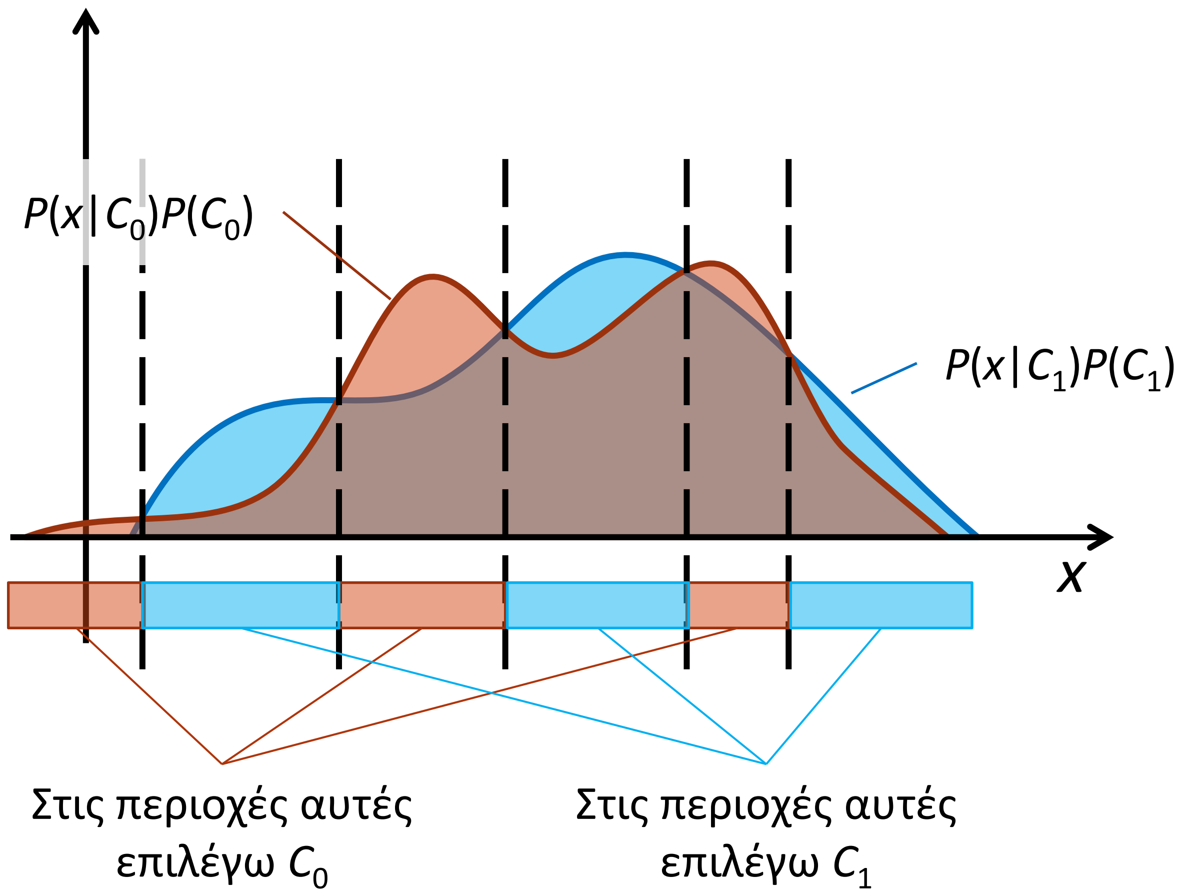
Παράδειγμα (συνέχεια)

Κριτήριο επιλογής κλάσης:

- Αν $x < x_0$ τότε $X \in C_0$
- Αν $x > x_0$ τότε $X \in C_1$

- **ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ**: Αν οι κλάσεις έχουν περίπλοκες κατανομές όπως εδώ τότε η ταξινόμηση γίνεται κατά περιοχές. Ταξινομούμε τα δείγματα κάθε περιοχής στην κλάση που έχει τη μεγαλύτερη εκ των υστέρων πιθανότητα στην περιοχή αυτή.

ΓΕΝΙΚΑ: Ταξινόμηση σε κλάσεις με την ΜεΥΠ



Άσκηση 1

- Σε ένα κουτί υπάρχουν 3 λεμόνια και 4 πορτοκάλια, ενώ ένα δεύτερο κουτί υπάρχουν 7 λεμόνια και 8 πορτοκάλια.
- Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξω λεμόνι ή πορτοκάλι από το πρώτο κουτί; Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξω λεμόνι ή πορτοκάλι από το δεύτερο κουτί; (Υπόδειξη: θέστε x = λεμόνι ή πορτοκάλι και C_0=κουτί-1, C_1=κουτί-2. Ψάχνουμε τα $P(x=\lambda|C_0)$, $P(x=\pi|C_0)$, $P(x=\lambda|C_1)$, και $P(x=\pi|C_1)$)
- Η εκ των προτέρων πιθανότητα να έχω επιλέξει το κουτί 1 ή 2 είναι 50/50. ($P(C_0)=P(C_1)=0,5$) Ποια είναι η εκ των προτέρων πιθανότητα να τραβήξω λεμόνι ή πορτοκάλι; (Ζητάμε τα $P(x=\lambda)$ και $P(x=\pi)$)
- Έχω στα χέρια μου ένα πορτοκάλι που τραβήχτηκε από ένα από τα δύο αυτά κουτιά. Ποια είναι η πιθανότητα να προήλθε απο το κουτί 1; (Υπόδειξη: Κάντε χρήση του κανόνα του Bayes)

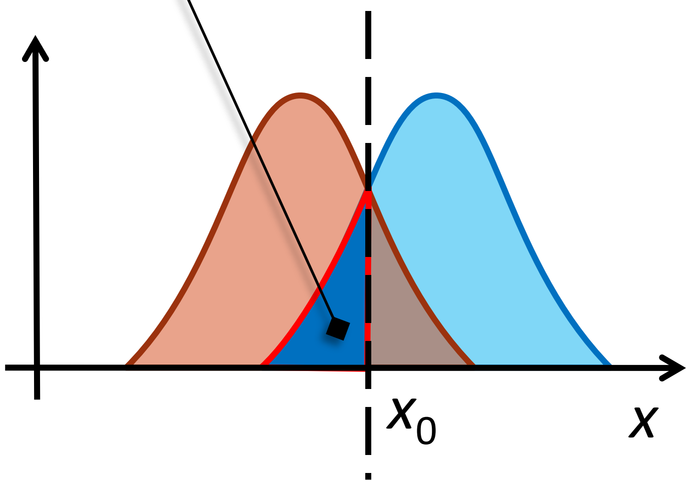
Πόσο σωστή είναι η επιλογή ΜεΥΠ;

- Ας γυρίσουμε στο παράδειγμα ταξινόμησης Γυναικών / Ανδρών με βάση το ύψος.
- Από το σχήμα είναι προφανές ότι υπάρχει πιθανότητα να κάνουμε λάθος αφού υπάρχουν γυναίκες ψηλότερες από x_0 και άντρες κοντύτεροι από x_0.
- Υπάρχουν δύο τύπων σφάλματα:
  1. Επιλέγω $X \in C_0$ ενώ στην πραγματικότητα $X \in C_1$:
     Ταξινομώ έναν Άντρα στην κλάση «Γυναίκα» επειδή είναι κοντύτερος από x_0
  2. Επιλέγω $X \in C_1$ ενώ στην πραγματικότητα $X \in C_0$:
     Ταξινομώ μια Γυναίκα στην κλάση «Άντρας» επειδή είναι ψηλότερη από x_0

Πιθανότητα σφάλματος

- Σφάλμα Τύπου 1: Επιλέγω $X \in C_0$ ενώ στην πραγματικότητα $X \in C_1$. Πιθανότητα:

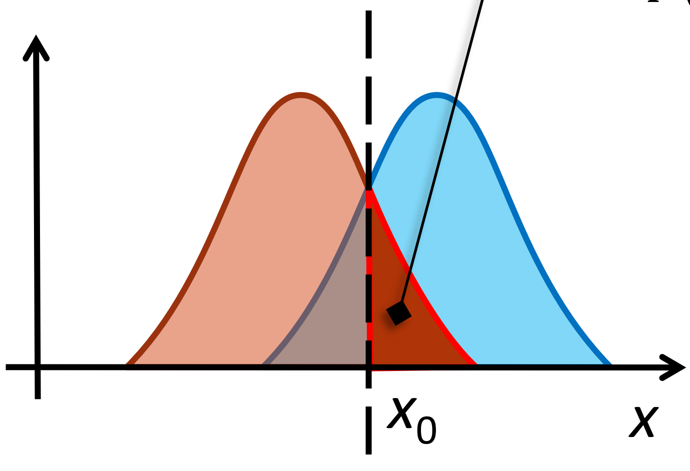
$$
\begin{aligned}
P(\sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ 1) &= P(x < x_0, X \epsilon C_1) \\
&= P(x < x_0 | X \epsilon C_1) P(C_1) \\
&= P(C_1) \int_{-\infty}^{x_0} P(x \mid C_1) dx
\end{aligned}
$$



Πιθανότητα σφάλματος

- Σφάλμα Τύπου 2: Επιλέγω $X \in C_1$ ενώ στην πραγματικότητα $X \in C_0$. Πιθανότητα:

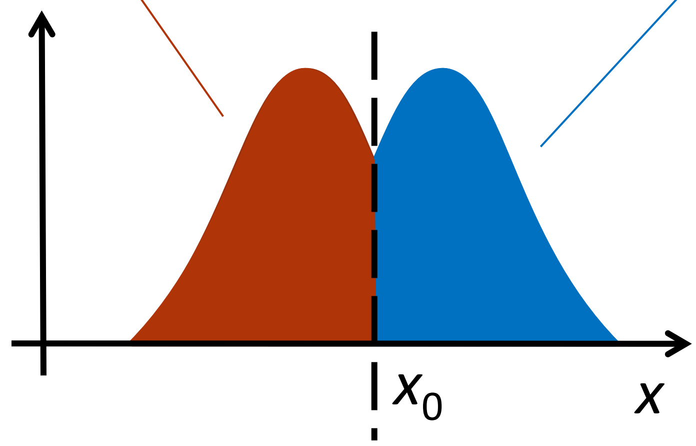
$$
\begin{aligned}
P(\sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ 2) &= P(x > x_0, X \epsilon C_0) \\
&= P(x > x_0 |\ C_0) P(C_0) \\
&= P(C_0) \int_{x_0}^{\infty} P(x \mid C_0) dx
\end{aligned}
$$



$$\Sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\acute{o}\ \Sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha = P(\sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ 1) + P(\sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ 2)$$

Πιθανότητα ορθής αναγνώρισης

$$
\begin{aligned}
P &= P(x < x_0, X\epsilon C_0) + P(x > x_0, X\epsilon C_1) \\
&= P(x < x_0 |\, C_0)P(C_0) + P(x > x_0 |\, C_1)P(C_0) \\
&= P(C_0)\int_{-\infty}^{x_0} P(x \mid C_0)dx + P(C_1)\int_{x_0}^{\infty} P(x \mid C_1)dx
\end{aligned}
$$



Άσκηση 2

- Παίζετε σε ένα παιχνίδι όπου για να κερδίσετε πρέπει να μαντέψετε αν πίσω από μια κουρτίνα κρύβεται ένας άνδρας ή μια γυναίκα. Εκ των **προτέρων** οι πιθανότητες «Άνδρας» / «Γυναίκα» είναι 50/50 ($P(C_0)=P(C_1)=0.5$).
- Σας λένε ότι ο άνθρωπος αυτός έχει ύψος πάνω από 1,70. Η πιθανότητα ένας άνδρας να έχει ύψος πάνω από 1,70 είναι 60%, ενώ η πιθανότητα μια γυναίκα να έχει ύψος πάνω από 1,70 είναι 30%.
- Ποια είναι η εκ των προτέρων πιθανότητα ένας άνθρωπος (ασχέτως φύλου) να έχει ύψος > 1,70;
- Ποιες είναι η εκ των **υστέρων** πιθανότητες ο άνθρωπος πίσω από την κουρτίνα να είναι άντρας ή γυναίκα (αφού δηλαδή μας έχουν πεί ότι ύψος > 1,70);
- Επιλέγετε «Άνδρας». Ποια είναι η πιθανότητα σφάλματος;

Αναγνώριση προτύπων με ΜεΥΠ

- Ας υποθέσουμε ότι οι καμπύλες ύψους είναι Γκαουσσιανές με μέση τιμή μ_0=1,6 για τις γυναίκες και μ_1=1,8 για τους άνδρες. Επίσης, έστω ότι οι δύο καμπύλες έχουν την ίδια διασπορά σ^2 = 0,2. Συνεπώς

$$P(x \mid C_0) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{0{,}2 \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1{,}6)^2}{0.04}\right)$$

$$P(x \mid C_1) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{0{,}2 \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1{,}8)^2}{0.04}\right)$$

- Αφού οι καμπύλες είναι ίδιες, απλώς μετατοπισμένες, **και** έχουμε ίσες εκ των προτέρων πιθανότητες: $P(C_0) = P(C_1) = 0{,}5$ ....
- Τότε το κατώφλι είναι ακριβώς στη μέση

$$x_0 = 1{,}7$$

- Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι $P(x_0 \mid C_0) = P(x_0 \mid C_1)$

Ελαχιστοποιώντας το ρίσκο

- Μέχρι τώρα κάναμε την κρυφή υπόθεση ότι οι δύο τύποι σφαλμάτων έχουν το ίδιο κόστος. Σε ορισμένες περιπτώσεις, πχ ασθένειες, το σφάλμα τύπου 1 (να μη διαγνωστεί ασθένεια ενώ υπάρχει) έχει μεγαλύτερη βαρύτητα από το το σφάλμα τύπου 2 (να διαγνωστεί ασθένεια ενώ δεν υπάρχει). Έστω ότι
  - το κόστος που πληρώνουμε αν επιλέξουμε $X \in C_0$ ενώ το σωστό είναι $X \in C_1$ είναι L_{01}. Το ρίσκο σ'αυτή την περίπτωση είναι
    $$ρίσκο_1 = L_{01} \cdot P(x < x_0\,, C_1) = L_{01} P(x < x_0 \mid C_1) P(C_1)$$
  - το κόστος που πληρώνουμε αν επιλέξουμε $X \in C_1$ ενώ το σωστό είναι $X \in C_0$ είναι L_{10}. Το ρίσκο σ'αυτή την περίπτωση είναι
    $$ρίσκο_2 = L_{10}\, P(x > x_0\,, C_0) = L_{10} P(x > x_0 \mid C_0) P(C_0)$$
- Τότε το βέλτιστο κατώφλι x_0 είναι αυτό για το οποίο
  $$ρίσκο_1 = ρίσκο_2$$

Επιλογή κατωφλίου με βάση το ρίσκο

- Επιλέγουμε το καλύτερο κατώφλι x_0 με το κριτήριο

$$L_{01} P(x_0 \mid C_1) P(C_1) = L_{10} P(x_0 \mid C_0) P(C_0)$$

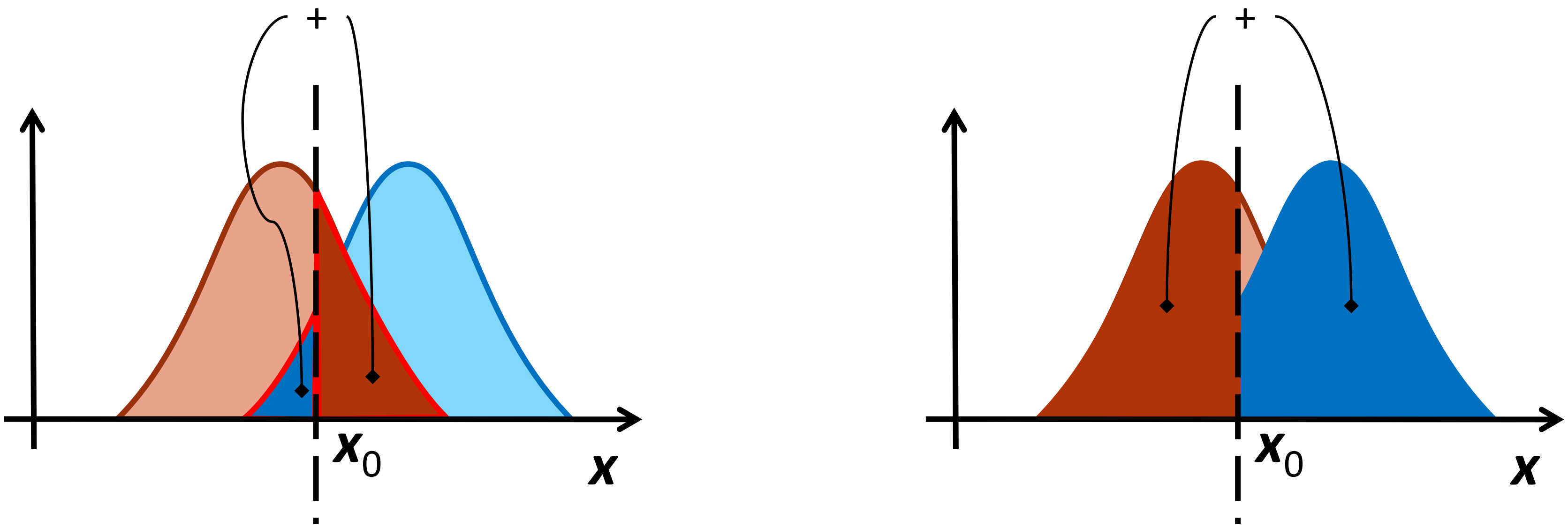
$$\frac{P(x_0 \mid C_1)}{P(x_0 \mid C_0)} = \frac{L_{10}}{L_{01}} \frac{P(C_0)}{P(C_1)}$$

- Παράδειγμα: Στην περίπτωση αναγνώρισης γυναικών/ανδρών με βάση το ύψος, έχουμε $P(C_1) = P(C_0)$. Αν για κάποιο λόγο θεωρούμε ότι $L_{01}=2L_{10}$ (δηλαδή, κοστίζει δύο φορές περισσότερο να αναγνωρίσουμε έναν άνδρα ως γυναίκα από το να αναγνωρίσουμε μια γυναίκα ως άνδρα) τότε το κατώφλι επιλέγεται με βάση τον τύπο

$$\frac{P(x_0 \mid C_1)}{P(x_0 \mid C_0)} = 0.5 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad P(x_0 \mid C_1) = 0.5 \cdot P(x_0 \mid C_0)$$

Επιλογή κατωφλίου με βάση το ρίσκο

Πιθανότητα λάθους   Πιθανότητα ορθής αναγνώρισης



Ελαχιστοποιώντας το ρίσκο. Παράδειγμα 2: Αναγνώριση υποβρυχίου

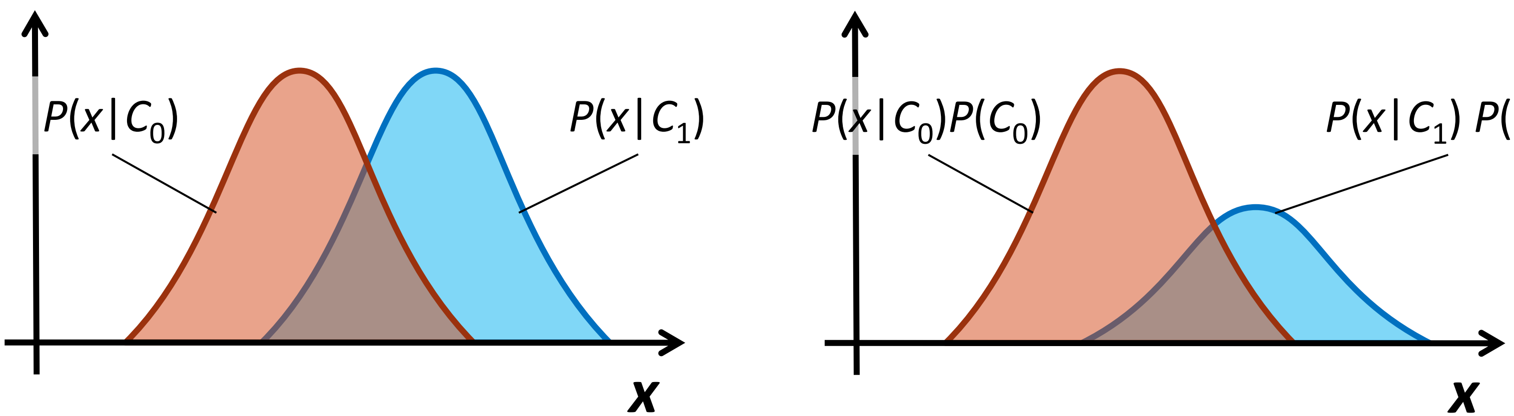
- Ένα πολεμικό υποβρύχιο διαθέτει ένα σύστημα αναγνώρισης εχθρικών υποβρυχίων μέσω επεξεργασίας υποθαλάσσιων ήχων. Συγκεκριμένα, ένα υποβρύχιο μικρόφωνο καταγράφει τους ήχους και ένα υποσύστημα εξαγωγής χαρακτηριστικών μετά από ανάλυση συχνοτήτων εξάγει την ισχύ x μιας συγκεκριμένης συχνότητας f. Έτσι το διάνυσμα χαρακτηριστικών αποτελείται μόνο από το x:

$$\boldsymbol{x} = [x]$$

- Επειδή η προπέλα του εχθρικού υποβρυχίου παράγει ήχους στην συχνότητα f , το x θεωρείται καλό χαρακτηριστικό για την αναγνώριση του εχθρικού σκάφους. Ωστόσο, το περιβάλλον του βυθού παράγει και αυτό ήχους στην ίδια συχνότητα f, αν και συνήθως μικρότερης έντασης. Η ένταση x της συχνότητας f είναι ουσιαστικά μια τυχαία μεταβλητή, η οποία έχει άλλη κατανομή όταν υπάρχει εχθρικό υποβρύχιο και άλλη κατανομή όταν δεν υπάρχει.

Ελαχιστοποιώντας το ρίσκο. Παράδειγμα 2: Αναγνώριση υποβρυχίου

- Το πρόβλημα αναγνώρισης έχει δύο κλάσεις*:
  - C_0: δεν υπάρχει εχθρικό υποβρύχιο
  - C_1: υπάρχει εχθρικό υποβρύχιο
- Έστω ότι $P(C_0)=2/3$, $P(C_1)=1/3$ (δύο φορές πιθανότερο να μην υπάρχει υποβρύχιο παρά να υπάρχει).
- Οι κατανομές πιθανότητας $P(x|C_0)$ και $P(x|C_1)$, είναι οι εξής:

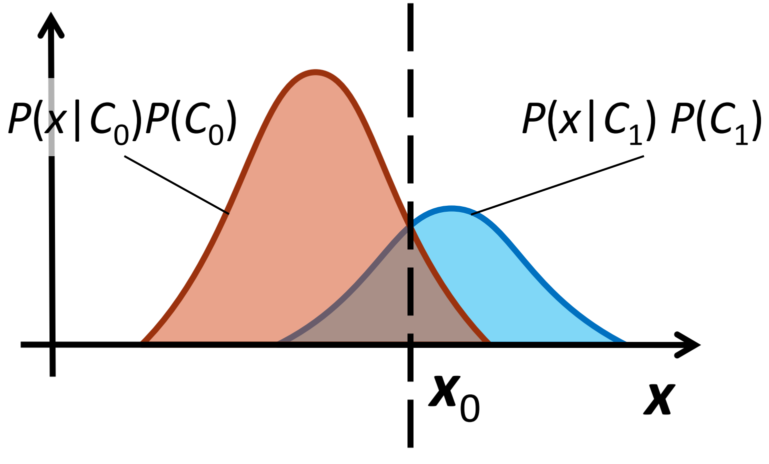


*Επειδή το πρόβλημα αφορά *ανίχνευση* (*detection*) ενός αντικειμένου, καλείται **πρόβλημα ανίχνευσης**.

Ελαχιστοποιώντας το ρίσκο. Παράδειγμα 2: Αναγνώριση υποβρυχίου

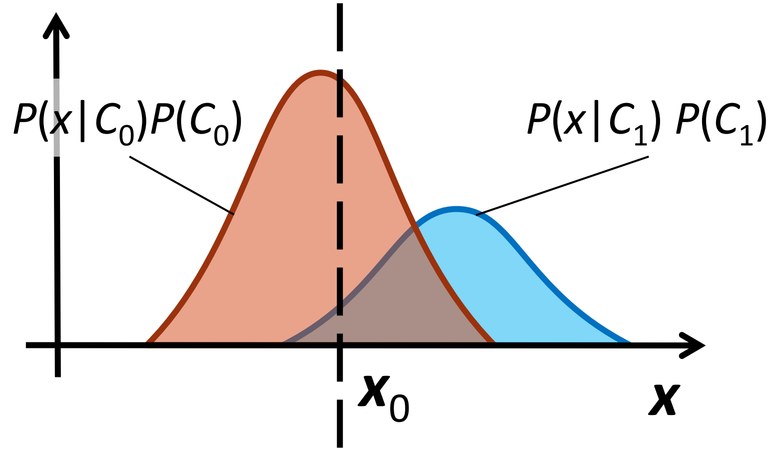
- L_{01} = κόστος να θεωρώ $x \in C_0$ (όχι υποβρύχιο) ενώ $x \in C_1$ (υπάρχει υποβρύχιο)
- L_{10} = κόστος να θεωρώ $x \in C_1$ (υπάρχει υποβρύχιο) ενώ $x \in C_0$ (όχι υποβρύχιο)
- Συνήθως το πρώτο σφάλμα είναι πολύ σοβαρότερο από το δεύτερο και συνεπώς, πχ. $L_{01} = 10 \cdot L_{10}$

Αν $L_{01} = L_{10}$ τότε



$$P(x_0|C_0)P(C_0)=P(x_0|C_1)P(C_1)$$

Αν $L_{01} = 10 \cdot L_{10}$ τότε



$$P(x_0|C_0)P(C_0)=10 \cdot P(x_0|C_1)P(C_1)$$