Χεμπιανά μοντέλα μάθησης

Κώστας Διαμαντάρας
Τμήμα Πληροφορικής
ΤΕΙ Θεσσαλονίκης

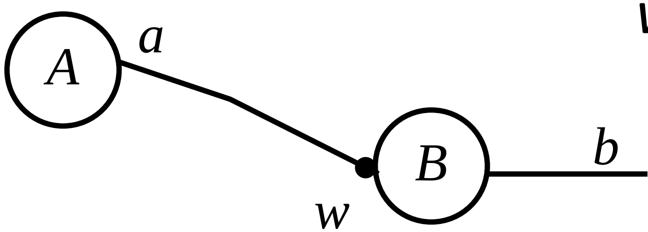
Ο Κανόνας του Hebb

Donald O. Hebb, *Organization of Behavior* (1949)

- Όταν ο άξονας ενός νευρώνα *Α* είναι αρκετά κοντά ώστε να διεγείρει το νευρώνα *Β* και συστηματικά συμμετέχει στην ενεργοποίησή του, τότε κάποια μεταβολική αλλαγή συμβαίνει είτε στο ένα απ' τα δύο είτε και στα δύο κύτταρα έτσι ώστε η αποτελεσματικότητα με την οποία ο *Α* διεγείρει τον *Β* αυξάνεται.

Ο Κανόνας του Hebb

- Αύξησε το συναπτικό βάρος της σύνδεσης μεταξύ του νευρώνα *A* και του νευρώνα *B* ανάλογα με το γινόμενο των εξόδων τους:



$$w \leftarrow w + \beta \cdot a \cdot b$$

Χεμπιανή μάθηση και στατιστική ανάλυση

- Κανόνας του Hebb → Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών (Principal Component Analysis – PCA)
- PCA → Βέλτιστη εξαγωγή γραμμικών χαρακτηριστικών
- Συμπίεση πληροφορίας
- PCA = γνωστή και κλασσική στατιστική μέθοδος

Στατιστική παρατήρηση

Διάνυσμα παρατήρησης n διαστάσεις:

$$\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$$

$x_1, \ldots, x_n$ = τυχαίες μεταβλητές

Διάνυσμα χαρακτηριστικών m διαστάσεις:

$$\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_m]^T$$

$y_1, \ldots, y_m$ = τυχαίες μεταβλητές (κρυμμένες, όχι άμεσα παρατηρήσιμες)

$$m < n$$

Γενικό μοντέλο χαρακτηριστικών

- $m < n$
- *υπάρχουν συναρτήσεις* $f_1()$, ..., $f_n()$ *ώστε*

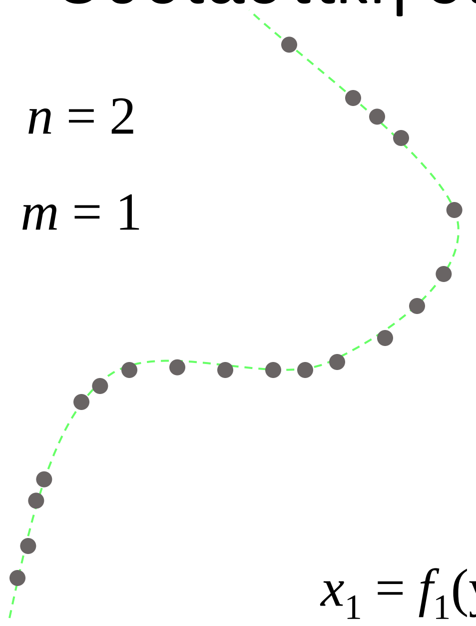
$$x_1 = f_1(y_1,\ldots,y_m) = f_1(\mathbf{y})$$
$$\vdots$$
$$x_n = f_n(y_1,\ldots,y_m) = f_n(\mathbf{y})$$

Διάσταση διανύσματος παρατήρησης

- Επιφανειακή διάσταση = *n*
- Ουσιαστική διάσταση = *m*

$n = 2$

$m = 1$



$$x_1 = f_1(\mathrm{y})$$

$$x_2 = f_2(\mathrm{y})$$

Γραμμικό μοντέλο χαρακτηριστικών

- Ειδική περίπτωση

$$x_1 = \mathbf{f}_1^T \mathbf{y}$$

$$\vdots$$

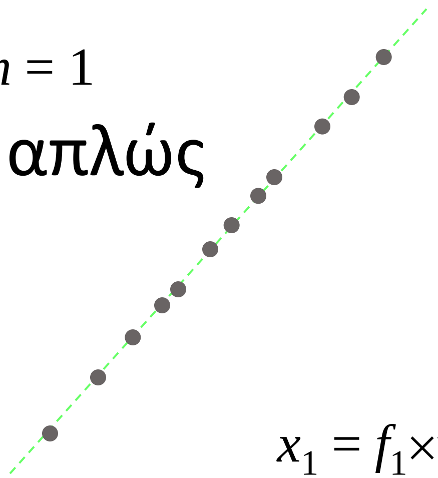
$$x_n = \mathbf{f}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{y}$$

$n = 2$

$m = 1$

ή απλώς



$$x_1 = f_1 \times \mathrm{y}$$

$$x_2 = f_2 \times \mathrm{y}$$

Ιδιότητες διανύσματος παρατήρησης ($m < n$)

- Παρατηρήσεις συσχετισμένες.

Πχ. m=1, n=2,

f_1, f_2 = βαθμωτοί αριθμοί

$$x_1 = f_1 y$$
$$x_2 = f_2 y$$

και άρα

$$x_2 = (f_2/f_1)x_1$$

Πώς βρίσκω τα χαρακτηριστικά;

- Αν <u>δεν</u> γνωρίζω το **F**
  - Ανάλυση ιδιοτιμών του $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$

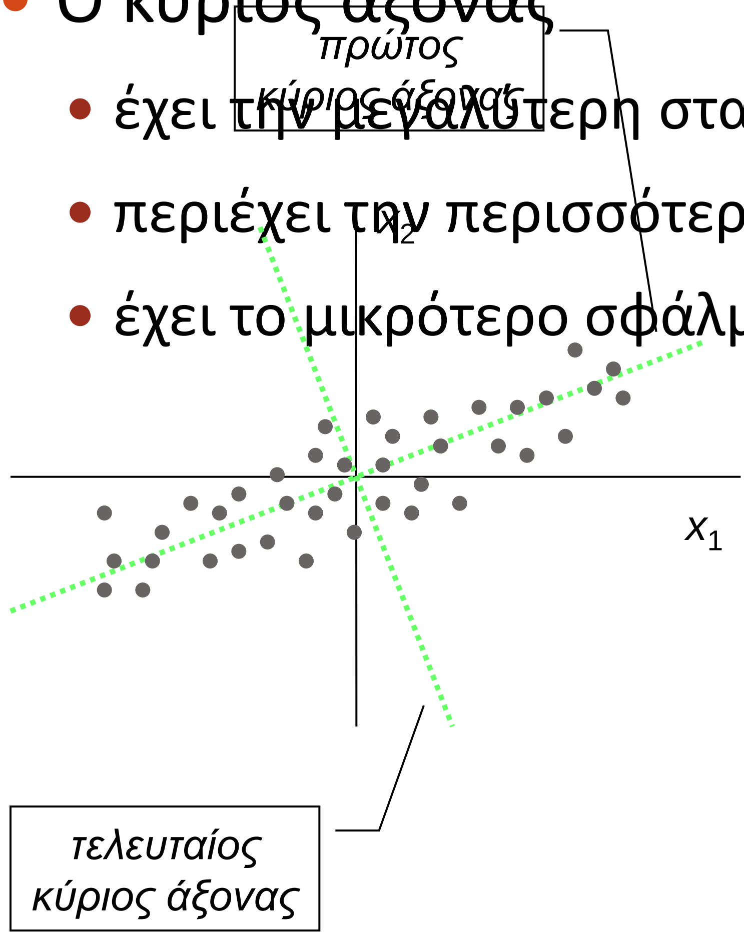
$$\mathbf{R}_x \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$$

  - $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ αντιστοιχούν σε $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$
  - Θέτω $\mathbf{U} = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m]$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{U}^T \mathbf{x}$$

Παράδειγμα PCA

- Ο κύριος άξονας
  - έχει την μεγαλύτερη στατιστική διασπορά
  - περιέχει την περισσότερη πληροφορία για το σήμα
  - έχει το μικρότερο σφάλμα προσέγγισης



Ορισμοί

- $\mathbf{e}_i$: *i* κύριο ιδιοδιάνυσμα
- $y_i = \mathbf{e}_i^T\mathbf{x}$: *i* κύρια συνιστώσα (ΚΣ)
- Μετασχηματισμός Karhunen-Loeve (KLT)

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{x}$$

Ιδιότητες

- Τα κύρια ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια
- Οι κύριες συνιστώσες (ΚΣ) είναι ασυσχέτιστες
- Η διασπορά της *i* ΚΣ είναι λ_i

Εφαρμογή: Εξαγωγή χαρακτηριστικών: *Βιομετρικά δεδομένα χελώνας*

- x_1 = μήκος καυκάλου
- x_2 = πλάτος καυκάλου
- x_3 = ύψος καυκάλου

	Κύρια Συνιστώσα		
Μεταβλητή	**1**	**2**	**3**
Μήκος	0.813	-0.545	-0.205
Πλάτος	0.496	0.832	-0.249
Ύψος	0.307	0.101	0.947
Διασπορά	680.4	6.5	2.9
Ποσοστό συνολικής διασποράς	98.6%	0.9%	0.4%

Όλη σχεδόν η πληροφορία στο γραμμικό συνδυασμό $0.813x_1+0.496x_2+0.307x_3$

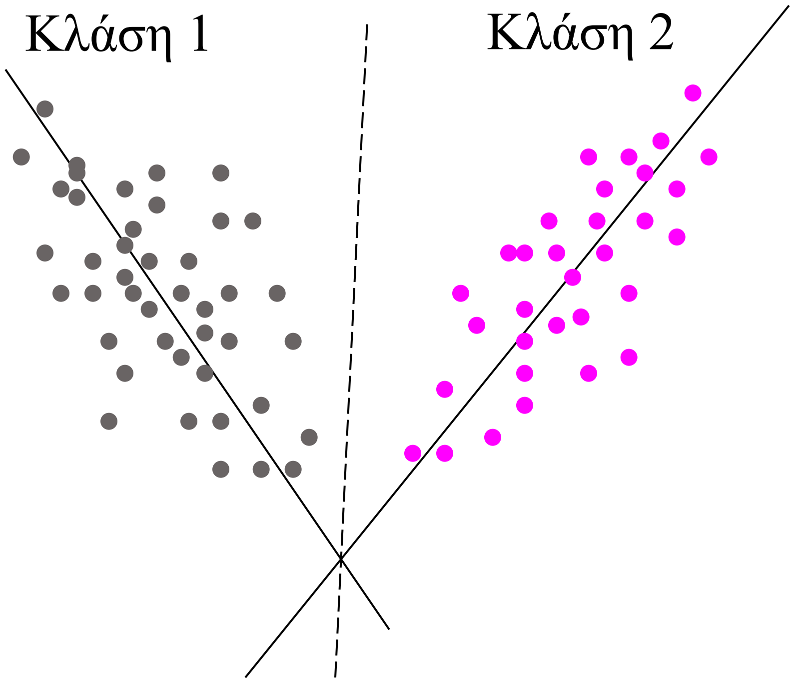
Εφαρμογή: συμπίεση δεδομένων

4

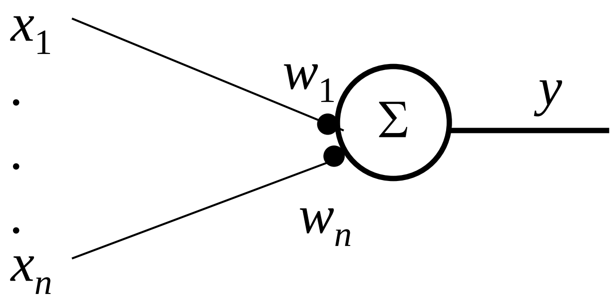
8

12

Εφαρμογή: Ομαδοποίηση δεδομένων (clustering)



PCA και γραμμικά Χεμπιανά μοντέλα



$$y = \sum w_i x_i = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$$

Χεμπιανή μάθηση χωρίς περιορισμούς

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \beta[y(k)\, \mathbf{x}(k)]$$

- Πρόβλημα σύγκλισης

$$\mathbf{w}(k) \rightarrow \infty$$

Χεμπιανή μάθηση με κανονικοποίηση

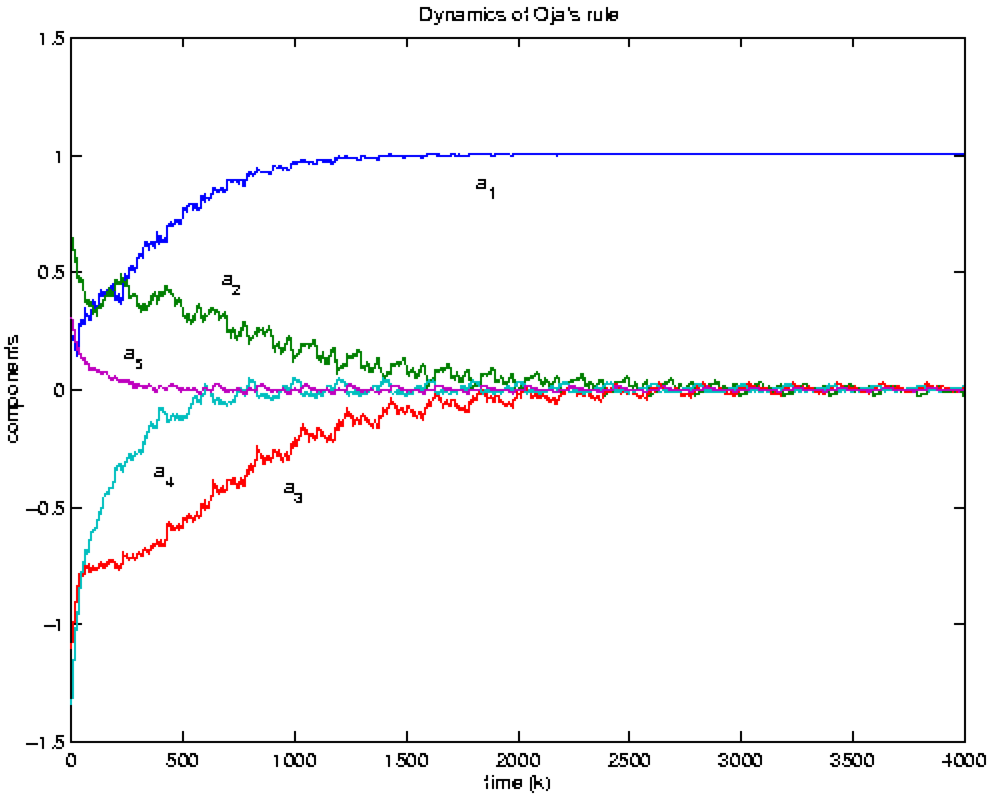
- Κανόνας του Oja (Oja1982)

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \beta[y(k)\,\mathbf{x}(k) - y(k)^2\mathbf{w}(k)\,]$$

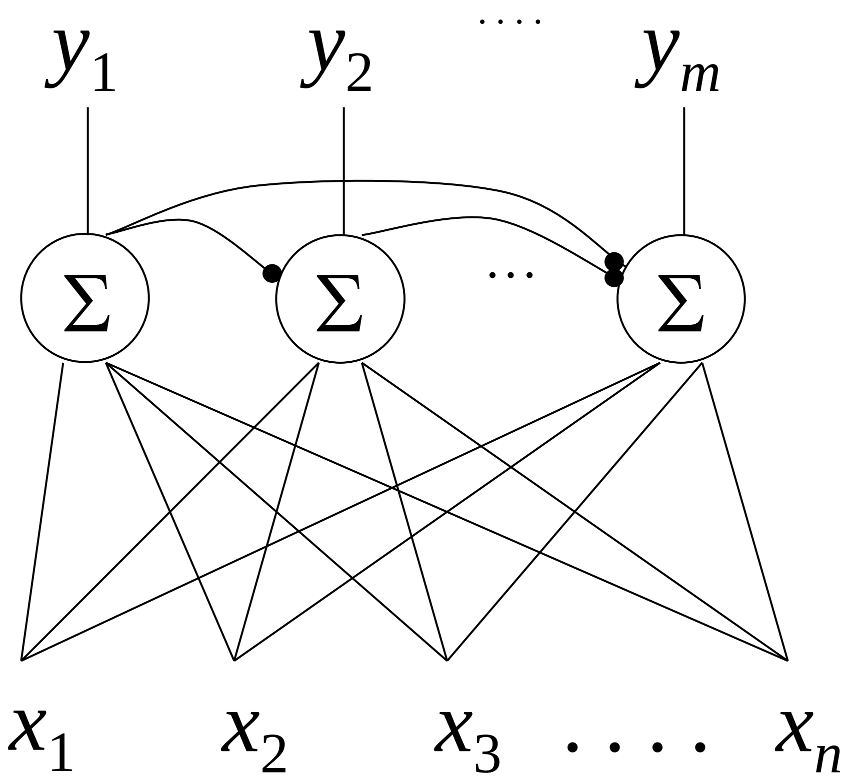
$$\mathbf{w}(k) \rightarrow \mathbf{e}_1 = \text{κύριο ιδιοδιάνυσμα}$$

$$||\mathbf{w}(k)|| \rightarrow 1$$

Σύγκλιση του κανόνα του Oja



Εξαγωγή πολλών κύριων συνιστωσών



Μοντέλο APEX

Αλγόριθμος APEX

Σχέση εισόδου-εξόδου

$$y_i = \sum_i w_{ij} x_j - \sum_j c_{ij} y_j$$

Αλγόριθμος

$$w_{ij}(k+1) = w_{ij}(k) + \beta[y_i(k)\, x_j(k) - y_i(k)^2 w_{ij}(k)]\ c_{ij}(k+1) = c_{ij}(k) + \beta[y_i(k)\, y_j(k) - y_i(k)^2 c_{ij}(k)]$$

Αλγόριθμος APEX

$$\mathbf{w}_1(k) \to \mathbf{e}_1 = \text{κύριο ιδιοδιάνυσμα}$$

$$\mathbf{w}_2(k) \to \mathbf{e}_2 = \text{δεύτερο ιδιοδιάνυσμα}$$

$$\mathbf{w}_3(k) \to \mathbf{e}_3 = \text{τρίτο ιδιοδιάνυσμα}$$

....

$$||\mathbf{w}_1(k)||,\ ||\mathbf{w}_2(k)||, \ldots,\ ||\mathbf{w}_m(k)|| \to 1$$