

## Ευφυή Συστήματα (Intelligent Systems)

### Ασαφή Συστήματα

Ω ... Ω

Παναγιώτης Αδαμίδης

adamidis@it.teithe.gr

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής  
Αλεξάνδρειο Τ.Ε.Ι. Θεσσαλονίκης

## Ποια Ασάφεια;

### Ακρίβεια και Σημαντικότητα στον πραγματικό κόσμο



## Ασαφής Λογική

(1/2)

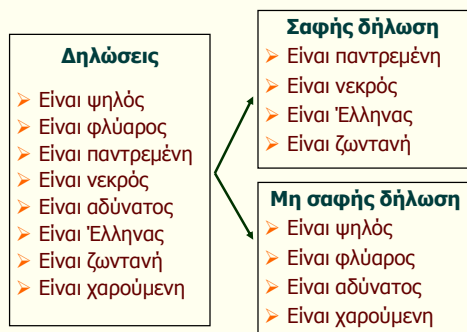
- Η Ασαφής Λογική έχει σχέση με τη σημαντικότητα της ακρίβειας: Πόσο σημαντικό είναι να είμαστε ακριβείς όταν αρκεί μια απλή εκτίμηση;
- Η Ασαφής λογική είναι ένας συναρπαστικός χώρος έρευνας, γιατί κάνει καλά τη δουλειά της συμβιβάζοντας τη σημασία και την ακρίβεια, κάτι που οι άνθρωποι κάνουν επιτυχημένα για πάρα πολλά χρόνια.
- Με αυτή την έννοια, η ασαφής λογική είναι τόσο παλιά όσο και νέα, διότι, αν και η σύγχρονη και μεθοδική επιστήμη της ασαφούς λογικής είναι ακόμα νέα, οι έννοιες της ασαφούς λογικής βασίζονται στις πανάρχαιες δεξιότητες του ανθρώπινου συλλογισμού.

## Ασαφής Λογική

(2/2)

- Η Ασαφής Λογική είναι ένας χρήσιμος τρόπος αντιστοίχισης ενός χώρου (είσοδος) σε έναν άλλο (έξοδος). Παραδείγματα:
  - Εκφράζοντας την ποιότητα εξυπηρέτησης σε ένα εστιατόριο, ένα ασαφές σύστημα μπορεί να καθορίσει το φιλοδώρημα.
  - Ορίζοντας το πόσο ζεστό θέλετε να είναι το νερό, ένα ασαφές σύστημα μπορεί να ρυθμίσει κατάλληλα τη παροχή κρύου/ζεστού νερού.
  - Δεδομένης της πληροφορίας απόστασης ενός αντικειμένου, ένα ασαφές σύστημα μπορεί να ρυθμίσει κατάλληλα την εστίαση του φακού μιας φωτογραφικής μηχανής.
  - Γνωρίζοντας πόσο γρήγορα κινείται ένα αυτοκίνητο και το πόσο δυσκολεύεται ο κινητήρας, ένα ασαφές σύστημα μπορεί να αλλάξει ταχύτητα.

## Γιατί ασαφή;



## Γιατί ασαφής λογική;

- Εύκολο να κατανοηθεί.
- Είναι ευέλικτη επιτρέποντας τον εμπλουτισμό ενός συστήματος χωρίς να αρχίζει από την αρχή.
- Λειτουργεί και με μη ακριβή δεδομένα
- Επιτρέπει τη μοντελοποίηση μη γραμμικών συναρτήσεων με αυθαίρετη πολυπλοκότητα.
- Επιτρέπει την ενσωμάτωση της γνώσης/εμπειρίας των ειδικών
- Επιτρέπει το συνδυασμό της με συμβατικές τεχνικές ελέγχου.
- Βασίζεται στη φυσική γλώσσα.

## Γιατί ασαφή;

- Ο κυρίαρχος τρόπος λειτουργίας της επιστήμης απαιτεί προτάσεις οι οποίες είναι είτε ΑΛΗΘΕΙΣ είτε ΨΕΥΔΕΙΣ.
- Ο τρόπος λειτουργίας της ανθρώπινης λογικής όμως δεν θέτει ακριβή όρια μεταξύ ΑΛΗΘΟΥΣ και ΨΕΥΔΟΥΣ
- Η ασαφής λογική προτάθηκε από τον Lotfi A Zadeh (UCLA, Berkeley)
- Πρόταση: Ο Γιώργος είναι νέος.
- Δεδομένο: Ο Γιώργος είναι 22 ετών. Η **ΑΛΗΘΕΙΑ** του ο Γιώργος είναι νέος είναι **θέμα βαθμού (matter of degree)**
- Πρόταση: Ο Γιώργος είναι κάτω των 22 ετών.
- Δεδομένο: Ο Γιώργος είναι 24 ετών. Η **ΑΛΗΘΕΙΑ** του ο Γιώργος είναι 22 ετών είναι το κενό σύνολο.

## Πρόβλημα Διχοτόμησης

- Ένας σπόρος δεν αποτελεί σωρό, ούτε δύο ή τρεις σπόροι... ενώ από την άλλη όλοι θα συμφωνήσουμε ότι 100 δισεκ. σπόροι είναι ένας σωρός. Ποιο είναι λοιπόν το κατάλληλο όριο; Μπορούμε να πούμε ότι 325647 σπόροι είναι σωρό ενώ οι 325646 δεν είναι;

*Borel, 1950*

## Ιστορική αναδρομή

- ~1920: J. Lukasiewicz, E. Post (λογική τριών τιμών και λογική πολλών τιμών – πλειότιμη )
- 1965: L.A. Zadeh (ασαφή σύνολα)
- ~1975: E.H. Mamdani (ασαφής ελεγκτής)
- ~1987: εφαρμογές ασαφών συνόλων στην Ιαπωνία

## Κύριες επιδράσεις

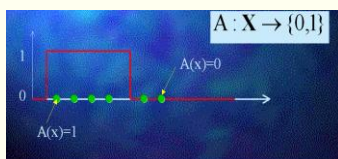
- Η θεωρία των ασαφών συνόλων ως ουσιαστική υλοποίηση του granular computing.
- Τα ασαφή σύνολα ως μία από τις τεχνολογίες της Υπολογιστικής Νοημοσύνης (Computational Intelligence) στην σχεδίαση υβριδικών συστημάτων.

## Σύνολα

- Βασίζονται στην ιδέα του «ανήκει»
- Χαρακτηριστικές συναρτήσεις:

$$x \in A \Leftrightarrow A(x) = 1$$

$$x \notin A \Leftrightarrow A(x) = 0$$



## Συνάρτηση συμμετοχής (Membership function)

- Εισαγωγή της ιδέας της μερικής συμμετοχής ενός στοιχείου σε κάποια έννοια.
- Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή συμμετοχής  $A(x)$  τόσο περισσότερο τυπικά το  $x$  ανήκει στο  $A$ .
- Η καμπύλη της συνάρτησης συμμετοχής αντιστοιχίζει κάθε σημείο του χώρου εισόδου (υπερσύνολο αναφοράς - universe of discourse) σε μία τιμή συμμετοχής (ή βαθμό συμμετοχής) από 0 έως 1.

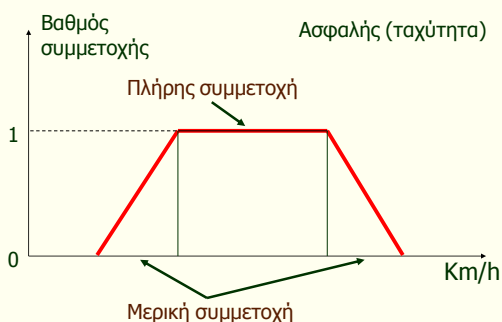
## Ασαφής Σύνολα: Ορισμός

- Το ασαφές σύνολο  $A$  χαρακτηρίζεται από μία συνάρτηση συμμετοχής  
 $A: X \rightarrow [0,1]$
- $A(x)=1$  : πλήρες μέλος (*ανήκει*)
- $A(x)=0$  : πλήρης αποκλεισμός (*δεν ανήκει*)
- $A(x)=0.3$  : μερική συμμετοχή

## Ασαφή ή Σαφή (Crisp) Σύνολα

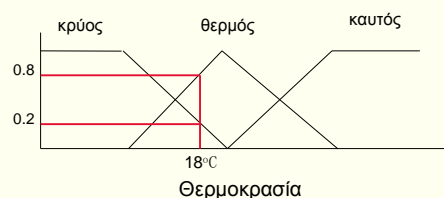
- Σαφές Σύνολο  $A$ 
  - Ένα στοιχείο είτε είναι μέλος του συνόλου  $A$  (100%) είτε όχι (0%)
- Ασαφές Σύνολο  $A$ 
  - Ένα στοιχείο έχει ένα βαθμό συμμετοχής στο σύνολο  $A$
  - Ένα στοιχείο μπορεί να έχει βαθμό συμμετοχής μη μηδενικό τόσο στο  $A$  όσο και στο  $\sim A$

## Συνάρτηση συμμετοχής



## Βαθμός Συμμετοχής

- Οριζόντιος άξονας: όλα τα πιθανά μέλη του συνόλου (ταξινομημένα αν είναι δυνατό)
- Κάθετος άξονας: τιμή συμμετοχής από 0 (καθόλου) έως 1 (πλήρως)



## Λεκτικοί όροι

- "κρύο", "θερμό", "καυτό" είναι λεκτικοί όροι, που αναπαρίστανται από επικαλυπτόμενες συναρτήσεις συμμετοχής
- Μπορούμε να ορίσουμε *λεκτικούς τροποποιητές*
  - Πολύ  $A$  = τετράγωνο της συνάρτησης συμμετοχής στο  $A$
  - Κάπως θερμός = τετραγωνική ρίζα της συνάρτησης συμμετοχής στο  $A$
  - Όχι  $A = 1-A$
  - Έτσι: "όχι πολύ  $A$ " =  $1-A^2$

## Άσκηση δύναμης πέδησης

- Αν η ταχύτητα είναι από 10-20km/h και η απόσταση από 80-100μ τότε άσκηση πίεση 0.1 atm
- Αν η ταχύτητα είναι από 21-40km/h και η απόσταση από 30-79μ τότε άσκηση πίεση 0.1 atm.
- Πως αντιμετωπίζονται οι ταχύτητες 11km/h και 19km/h
  - Με τον ίδιο τρόπο.
- **Λύση(ς):** Μεγαλύτερη διακριτοποίηση μεταβλητών
  - Πρόβλημα: Τεράστιο πλήθος κανόνων
  - Πχ. 10 μεταβλητές εισόδου, σε 50 τμήματα κάθε μία...  $50^{10}$  κανόνες

## Αριθμητική περιγραφή συστήματος

- Απλό μαθηματικό μοντέλο
  - ♦ Απώλεια πληροφορίας
- Πολύπλοκο μοντέλο
  - ♦ Παράδειγμα με ...50<sup>10</sup> καταστάσεις
  - ♦ Αρχή της Ασυμβατότητας

## Αρχή ασυμβατότητας

«... καθώς η πολυπλοκότητα ενός συστήματος αυξάνεται, η ικανότητα για ακριβείς και ταυτόχρονα σημαντικές δηλώσεις που αφορούν τη συμπεριφορά του μειώνεται, και πέρα από ένα σημείο η ακρίβεια και η σημαντικότητα αποτελούν σχεδόν αμοιβαία αποκλειόμενα χαρακτηριστικά.»

L. Zadeh

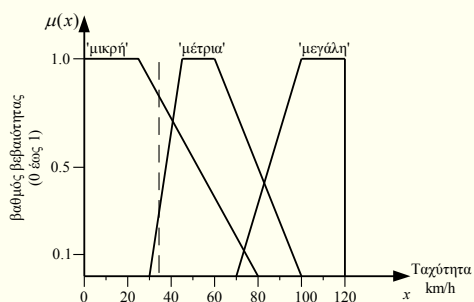
## Λεκτικοί κανόνες

- Αν η ταχύτητα είναι μικρή και η απόσταση μέτρια τότε δύναμη πέδησης μικρή
- Αν η ταχύτητα είναι μέτρια και η απόσταση μέτρια τότε δύναμη πέδησης μέτρια
- Αν η ταχύτητα είναι μεγάλη και η απόσταση μικρή τότε δύναμη πέδησης μεγάλη
- Λεκτικοί κανόνες: λεκτικοί όροι + σύνδεσμοι

## Διαμερισμός σε λεκτικούς όρους

- E: Πόσο σίγουρος είσαι ότι η ταχύτητα 15km/h είναι μικρή;
- A: 100%
- E: Πόσο σίγουρος είσαι ότι η ταχύτητα 20km/h είναι μικρή;
- A: 100%
- E: Πόσο σίγουρος είσαι ότι η ταχύτητα 40km/h είναι μικρή;
- A: 90% και λίγο μέτρια
- E: Πόσο σίγουρος είσαι ότι η ταχύτητα 60km/h είναι μικρή;
- A: Λίγο (10-20%) διότι είμαι πιο σίγουρος ότι είναι μέτρια

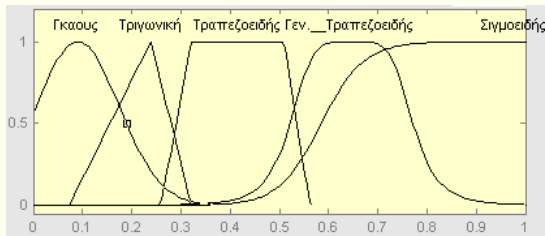
## Γραφική παράσταση ασαφούς συνόλου



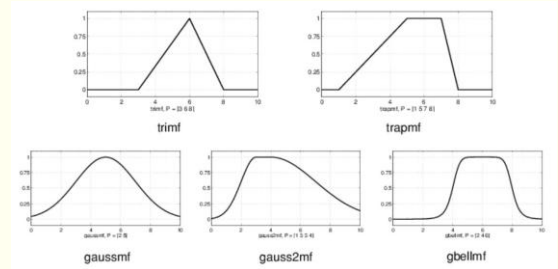
## Μερικές έννοιες

- Ασαφοποίηση (fuzzyfication): περιγραφή αριθμητικής τιμής με λεκτικούς όρους
- Το ασαφές σύνολο εκφράζει κατανομή δυνατότητας (possibility distribution) και όχι πιθανότητας
- Ο βαθμός συμμετοχής μιας τιμής σε ένα ασαφές σύνολο αποτελεί το βαθμό βεβαιότητας (*degree of certainty*) ότι η πρόταση που διατυπώνουμε είναι αληθής

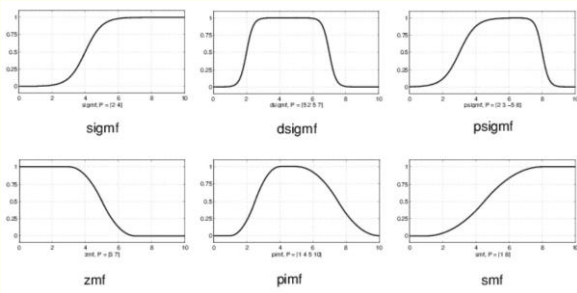
## Τύποι συναρτήσεων συμμετοχής



## Τύποι συναρτήσεων συμμετοχής (Matlab)



## Τύποι συναρτήσεων συμμετοχής (Matlab)



## Αναπαράσταση ασαφούς συνόλου

- $X$ : πεδίο ορισμού με διακριτές και πεπερασμένες τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Το ασαφές σύνολο αναπαρίσταται ως η ένωση των διατεταγμένων ζευγών
  - $x_i / \mu(x_i) : i = 1, 2, \dots, n$
  - ♦ Όπου  $x_i \in X$  και  $\mu(x_i) \in [0, 1]$  ο αντίστοιχος βαθμός συμμετοχής της τιμής.
- Αν  $A$  είναι ασαφές σύνολο τότε:
  - $A = \{x_1 / \mu(x_1) + x_2 / \mu(x_2) + \dots + x_n / \mu(x_n)\}$
  - ♦ Όταν  $X$  συνεχές και μη πεπερασμένο τότε:
    - $A = \int \mu(x) / x$  ή απλούστερα  $\mu(x_i)$

## Ορισμοί όρων για ασαφή σύνολα (1)

- **Υπερσύνολο αναφοράς (universe of discourse)**: Το πεδίο ορισμού της  $\mu(x)$ .
- **Κόρος (core)**: Το υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης συμμετοχής για το οποίο το πεδίο τιμών λαμβάνει τιμές ίσες προς τη μονάδα
 
$$x \in C \subseteq U \Leftrightarrow \mu(x) = 1$$
- **Πλάτος**: το εύρος του πεδίου ορισμού του - αποτελεί ένα μέτρο της ασάφειας (fuzziness) του όρου που περιγράφει.
- **Στήριξη (support)**: Το υποσύνολο του πεδίου ορισμού του για το οποίο η συνάρτηση συμμετοχής λαμβάνει μη μηδενικές τιμές  $x \in S \subseteq U \Leftrightarrow \mu(x) \neq 0$

## Ορισμοί όρων για ασαφή σύνολα (2)

- **Κανονικό (normal fuzzy set)**: Το ασαφές σύνολο για το οποίο υπάρχει τουλάχιστον μια τιμή στο πεδίο ορισμού του με βαθμό συμμετοχής μονάδα. Αλλιώς ονομάζεται **υποκανονικό**.
- **Ύψος (height)**: η μέγιστη τιμή της συνάρτησης συμμετοχής.
- **Όρια (boundaries)**: Τα σημεία του πεδίου ορισμού για τα οποία ισχύει  $0 < \mu(x) < 1$ .
- **Κυρτό (convex fuzzy set)**: το ασαφές σύνολο το οποίο έχει μονότονα αύξουσα ή μονότονα φθίνουσα συνάρτηση συμμετοχής.

### Πράξεις μεταξύ ασαφών συνόλων (1/3)

- $A, B$  ασαφή σύνολα με πεδίο ορισμού  $X$  και  $\mu_A(x), \mu_B(x)$  οι αντίστοιχες συναρτήσεις συμμετοχής
- **Τομή (intersection) - AND**
  - το  $x$  δεν μπορεί να συμμετέχει περισσότερο στο σύνολο της τομής ( $A$  and  $B$ ) από ό,τι στο  $A$ ,
  - Έτσι, η τιμή συμμετοχής στο ( $A$  and  $B$ ) =  $\min$  (τιμή συμμετοχής στο  $A$ , τιμή συμμετοχής στο  $B$ )

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \forall x \in X$$

### Πράξεις μεταξύ ασαφών συνόλων (2/3)

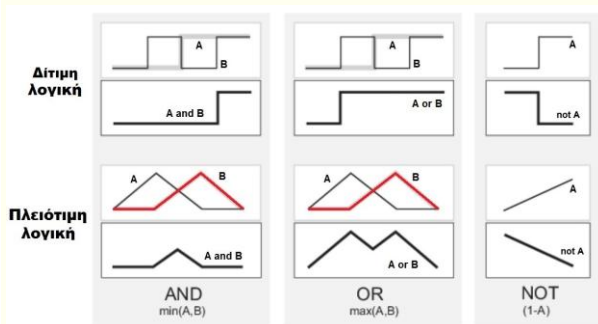
- **Ένωση (union) - OR**
  - η τιμή συμμετοχής στην ένωση ( $A$  or  $B$ ) πρέπει να είναι τουλάχιστον όση στο  $A$
  - Έτσι, η τιμή συμμετοχής στο ( $A$  or  $B$ ) =  $\max$  (τιμή συμμετοχής στο  $A$ , τιμή συμμετοχής στο  $B$ )

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \forall x \in X$$

- **Συμπλήρωμα (complement)**

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \forall x \in X$$

### Πράξεις μεταξύ ασαφών συνόλων (3/3)



### Τροποποιητές (modifiers) και φράκτες (hedges) (1/2)

- Ο λεκτικός όρος 'A' έχει συνάρτηση συμμετοχής  $\mu_A(x)$
- **Συγκεντρώσεις (concentrations):** μειώνουν την τιμή του βαθμού συμμετοχής.
  - Πολύ  $A$   $\mu_{\text{very } A}(x) = \mu_A^2(x)$
  - Πολύ Πολύ  $A$   $\mu_{\text{very very } A}(x) = \mu_A^4(x)$
  - $A$  και κάτι  $\mu_{\text{plus } A}(x) = \mu_A^{1.25}(x)$

### Τροποποιητές (modifiers) και φράκτες (hedges) (2/2)

- **Διαστολές (Dilations):** αυξάνουν την τιμή του βαθμού συμμετοχής.

- παρά κάτι  $A$   $\mu_{\text{Minus } A}(x) = \mu_A^{0.75}(x)$
- ελαφρώς  $A$   $\mu_{\text{slightly } A}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$

- **Ενδυναμώσεις (intensifications):** αποτελούν συνδυασμό της συγκεντρώσεως και της διαστολής.

$$\mu_{\text{intensify } A}(x) = \begin{cases} 2\mu_A^2(x) & \text{if } 0 \leq \mu_A(x) \leq 0.5 \\ 1 - 2[1 - \mu_A(x)]^2 & \text{if } 0.5 < \mu_A(x) \leq 1 \end{cases}$$

### Τομές άλφα (α-cuts)

- $A$  ασαφές σύνολο και  $\mu_A(x)$  η αντίστοιχη συνάρτηση συμμετοχής
- Η **τομή-α** του ασαφούς συνόλου  $A$  είναι ένα νέο ασαφές σύνολο  $A'$  με συνάρτηση συμμετοχής

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{if } 0 \leq \mu_A(x) \leq a \\ a & \text{if } a \leq \mu_A(x) \leq 1 \end{cases}$$

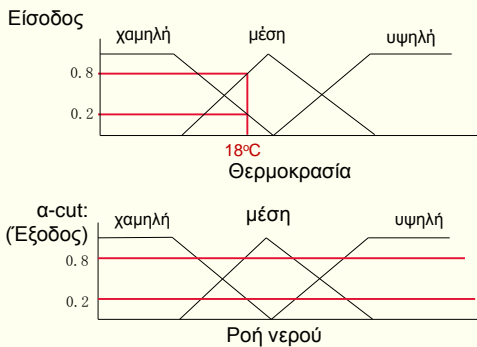
## Ασαφείς Κανόνες (Fuzzy Rules)

- Δύο βασικά μέρη:
  - ♦ το τμήμα **υπόθεσης** (*premise part*) και
  - ♦ το τμήμα συμπεράσματος ή απόφασης (*consequent part*)
- Βασική μορφή ασαφούς κανόνα (για μία είσοδο)
  - ♦ **mamdani** : *If x is A then y is B*
  - ♦ **T-S-K** : *If x is A then y is  $c_0+c_1x$* 
    - ✦ **A** και **B** ασαφή σύνολα
    - ✦ **x** η τιμή μιας μεταβλητής εισόδου που ασαφοποιείται
    - ✦ **y** η έξοδος του συστήματος που εκφράζει την απόφαση του κανόνα
    - ✦  $c_0, c_1 \in \mathcal{R}$

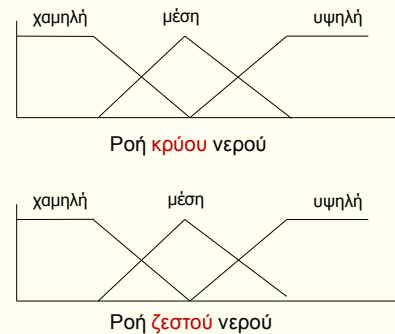
## Λειτουργία Ασαφούς Κανόνα

- Ασαφοποίηση (fuzzification)
- Ασαφής συνεπαγωγή (fuzzy implication)
- Αποασαφοποίηση (defuzzification)

### Παράδειγμα: Ρύθμιση ροής νερού Συναρτήσεις Συμμετοχής Εισόδου



### Παράδειγμα: Ρύθμιση ροής νερού Συναρτήσεις Συμμετοχής Εξόδων



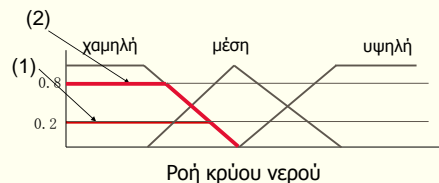
### Παράδειγμα: Ρύθμιση ροής νερού Κανόνες

1. Εάν η θερμοκρασία είναι χαμηλή, τότε ροή κρύου νερού είναι χαμηλή
2. Εάν η θερμοκρασία είναι μέση, τότε ροή κρύου νερού είναι χαμηλή
3. Εάν η θερμοκρασία είναι χαμηλή, τότε ροή ζεστού νερού είναι υψηλή
4. Εάν η θερμοκρασία είναι μέση, τότε ροή ζεστού νερού είναι μέση

### Παράδειγμα: Ρύθμιση ροής νερού Ασαφής Συμπερασμός - Κρύο νερό

Θερμοκρασία: 18° C

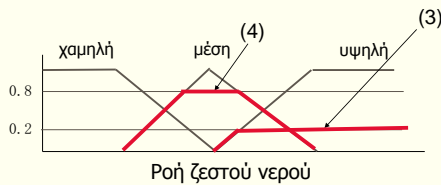
1. Εάν η θερμοκρασία είναι χαμηλή, τότε ροή κρύου νερού είναι χαμηλή
2. Εάν η θερμοκρασία είναι μέση, τότε ροή κρύου νερού είναι χαμηλή



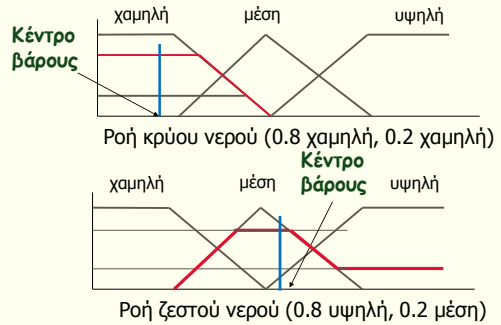
### Παράδειγμα: Ρύθμιση ροής νερού Ασαφής Συμπερασμός - Ζεστό νερό

Θερμοκρασία: 18° C

- Εάν η θερμοκρασία είναι χαμηλή, τότε ροή ζεστού νερού είναι υψηλή
- Εάν η θερμοκρασία είναι μέση, τότε ροή ζεστού νερού είναι μέση



### Παράδειγμα: Ρύθμιση ροής νερού Αποασαφοποίηση



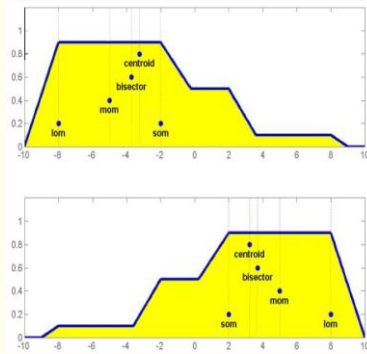
### Μέθοδοι Αποασαφοποίησης (Defuzzification)

- Κεντρική τιμή (Centroid defuzzification / center of area / center of mass)

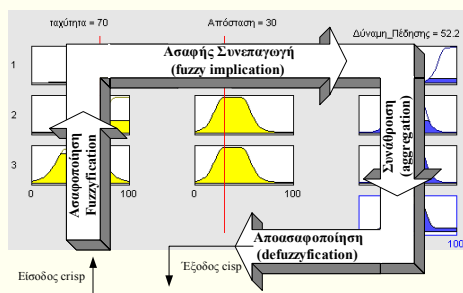
$$x^* = \frac{\int x \cdot \mu(x) dx}{\int \mu(x) dx}$$

- Μέση τιμή των μέγιστων τιμών (mean of maxima - mom)
- Άθροισμα μεγίστων (sum of maxima)
- Μεγαλύτερη των μεγίστων (largest of maximum - lom)
- Μικρότερη των μεγίστων (smallest of maximum - som)

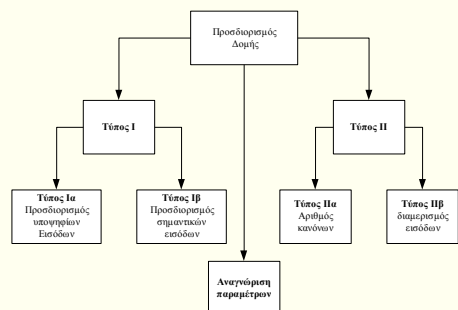
### Μέθοδοι Αποασαφοποίησης (Defuzzification)



### Διάγραμμα Ροής Ασαφούς Συμπερασμού



### Προσδιορισμός Δομής (Structure Identification)





### Πλεονεκτήματα Ασαφών Κανόνων

- Οι κανόνες εκφράζονται (σχεδόν) σε φυσική γλώσσα
- Χρειάζονται λιγότεροι κανόνες λόγω παρεμβολής (interpolation)
- Μη ακριβείς τιμές κατωφλίου
  - ◆ Οι ακριβείς τιμές κάνουν τα συστήματα ασταθή